

用综合离散法 分析舰船柱状桅的固有振动

吴华干

蔡承武

潘碧兰

杨涵青

(中山大学)

(七院七〇一所)

摘 要

本文采用薄膜应力状态假设与横截面形状不变假设^[1],应用综合离散法^[2-4],分析舰船柱状桅的固有振动,给出了某些数值结果。计算结果表明这是一种既能大幅度降低独立未知量数目,节省计算时间,又具有足够精确度的计算方法。

关键词 固有振动,综合离散法,薄膜应力假设,横截面形状不变假设

一、薄膜应力状态假设和横截面形状不变假设

桅杆计算简图及坐标如图1所示。由于桅杆截面尺寸(如 A_1 , A_2 , B_1 , B_2)远大于各侧面板的厚度及各加强筋的横截面尺寸,桅杆高度也远大于横向尺寸,因而可以把桅杆看作变截面薄壁杆件,引进薄膜应力状态假设和横截面形状不变假设^[1]。

根据薄膜应力状态假设,各侧面板被简化为膜,各加强筋由梁简化为杆。侧板中面各点位移分量只有 u , v , w (转角分量消失)。应力应变关系简化为:

$$\sigma_{\xi} = E\varepsilon_{\xi} \quad (\text{在筋上}) \quad (1)$$

$$\{\sigma^*\} = [D]\{\varepsilon^*\} \quad (\text{在侧板上}) \quad (2)$$

其中

$$\{\sigma^*\} = \{\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \tau_{\xi\eta}\}$$

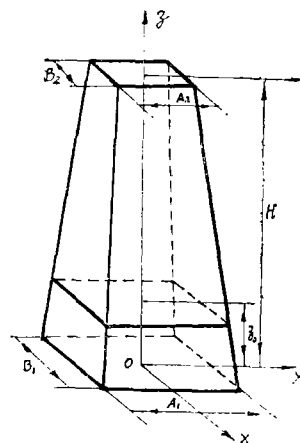


图 1

本文1986年6月收到

$$\{\varepsilon^*\} = \{\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \gamma_{\xi\eta}\}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1, & \mu, & 0 \\ \mu, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}$$

ξ 沿筋轴方向。 ξ, η 是各侧板的局部坐标。 $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \gamma_{\xi\eta}$ 分别表示各侧板上的点的应力,应变分量。

根据横截面形状不变假设,坐标为 (x, y, z) 的桅杆质点,其位移 $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ 可以表示为:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ \theta \\ w \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中 $U=U(z), V=V(z)$ 是纵坐标为 z 的桅杆横截面的形心沿 x, y 方向的位移分量。 $\theta=\theta(z)$ 是该截面绕 z 轴的转角。

此时,桅杆的约束条件表示成:

$$\text{在 } z=0 \text{ 处, } U=V=\theta=w=0 \quad (4)$$

$$\text{在 } z=z_0 \text{ 处, } U=V=\theta=0 \quad (5)$$

二、变分原理

根据Hamilton原理,系统的固有振动问题可以归结为下面的变分问题:

求非零实数 $\lambda(\lambda=\omega^2)$ 及未知函数 $U(z), V(z), \theta(z), w(x, y, z)$ 使Hamilton作用量 L 达到驻立值。

$$L = \int_{\Omega_1} \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma^*\} \cdot t d\Omega + \int_{\Omega_2} \varepsilon_\xi \cdot \sigma_\xi \cdot \Delta ds$$

$$- \lambda \left[\int_{\Omega_1} (u, v, w) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \rho d\Omega + \int_{\Omega_2} (u, v, w) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \rho ds \right] \quad (6)$$

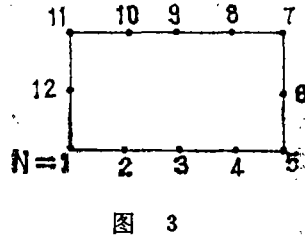
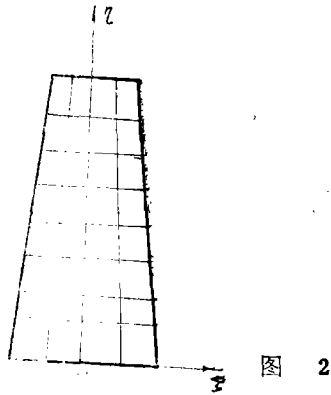
其中 U, V, θ, w 应满足约束条件(4), (5), 连续且具有分片连续的一阶导数。 Δ 为筋的横截面面积, Ω_1 为侧板的中面, Ω_2 为筋的轴向长度, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, ρ 为板的面密度或筋的线密度。

三、离散化

1. 网格的划分和单元的构成

首先用 M_s 个平行于 xoy 平面的横截面把桅杆分成 (M_s-1) 层, 如图2 ($M_s=9$)。然后

在每个截面上根据一定的间隔取 N_s 个节点,如图3($N_s=12$),而且使所有的节点沿竖的方向位于 N_s 条节线上。这 N_s 条节线与 M_s 个横截面就把桅杆的四个侧面划分为 $N_s \times (M_s - 1)$ 个四边形网格,共有 $N_s \times M_s$ 个节点。其中一个侧面的网格如图2所示。



每一个四边形网格有四个节点(如图4中 $P_1(M,N)$ 、 $P_2(M,N+1)$ 、 $P_3(M+1,N)$ 、 $P_4(M+1,N+1)$),把每一个四边形网格再剖分为两个三角形单元($\Delta P_1P_2P_3$ 、 $\Delta P_4P_3P_2$ 或 $\Delta P_1P_2P_4$ 、 $\Delta P_4P_3P_1$)和若干落在它上面的加强筋构成的杆单元(如图4中的 Q_1Q_2 杆)。以下把这样的一个四边形单元看作桅杆一个基本单元。

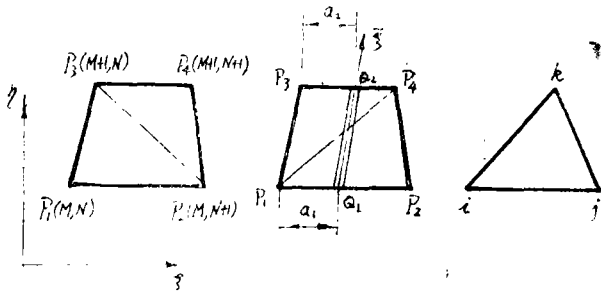


图 4

2. 基本单元刚度矩阵、质量矩阵的建立

假定我们讨论的单元位于第 M 与 $M+1$ 层网格之间,并以第 N 及 $N+1$ 条节线为其边界。

分别在每一个三角形单元和杆单元中,对位移分量作线性插值。而杆端的位移(如图4中的 Q_1, Q_2)分别用节点的位移值线性表示(P_1, P_2 和 P_3, P_4)。显然,这样构造的插值函数是满足泛函(6)的光滑度要求的。这样,四边形单元独立节点位移矢量在局部坐标系下可以表示为:

$$\{\delta_o^e\} = \{u_{MN}^*, v_{MN}^*, u_{M,N+1}^*, v_{M,N+1}^*, u_{M+1,N}^*, v_{M+1,N}^*, u_{M+1,N+1}^*, v_{M+1,N+1}^*\} \quad (7)$$

在整体坐标系下可以表示为:

$$\{\delta_1^e\} = \{u_{MN}, v_{MN}, w_{MN}, u_{M,N+1}, v_{M,N+1}, w_{M,N+1}, u_{M+1,N}, v_{M+1,N}, w_{M+1,N}, u_{M+1,N+1}, v_{M+1,N+1}, w_{M+1,N+1}\} \quad (8)$$

根据局部坐标与整体坐标的转换关系有:

$$\{\delta_0^e\} = [R_1^e] \{\delta_1^e\} \quad (9)$$

$[R_1^e]$ 是由坐标系单位向量的方向余弦构成的转换矩阵。

在建立基本单元的刚度矩阵时,首先按照通常有限元方法在局部坐标系下分别计算各个三角形单元的刚度矩阵 $[K_{\Delta}^*]$,然后按对号入座的方式,叠加两个三角形单元的刚度矩阵得相应于 $\{\delta_0^e\}$ 矢量的单刚 $[K_e^*]$,再根据(9)式得:

$$[K_{\Delta}] = [R_1^e]^T \cdot [K_e^*] \cdot [R_1^e] \quad (10)$$

$[K_{\Delta}]$ 便是两个三角形单元叠加之后相应于 $\{\delta_1^e\}$ 的单元刚度矩阵。

用同样办法,可得杆单元相应于 $\{\delta_1^e\}$ 的单元刚度矩阵 $[K_i^I]$ 。如四边形单元内有 M_B 条杆单元,则令

$$[K_1^e] = [K_{\Delta}] + \sum_{i=1}^{M_B} [K_i^I] \quad (11)$$

$[K_1^e]$ 即为四边形单元对应于矢量 $\{\delta_1^e\}$ 的单元刚度矩阵。

仿照同样的步骤,就可以建立四边形单元相应于矢量 $\{\delta_1^e\}$ 的单元质量矩阵 $[M_1^e]$ 。

3. 横截面形状不变假设的引进

先定义一个单元位移向量:

$$\{\delta_2^e\} = \{U_M, V_M, \theta_M, w_{MN}, w_{M,N+1}, U_{M+1}, V_{M+1}, \theta_{M+1}, w_{M+1,N}, w_{M+1,N+1}\} \quad (12)$$

根据(3)式,不难建立 $\{\delta_2^e\}$ 与 $\{\delta_1^e\}$ 之间的转换关系:

$$\{\delta_1^e\} = [R_2^e] \{\delta_2^e\} \quad (13)$$

这样,对应于 $\{\delta_2^e\}$,单元刚度矩阵和单元质量矩阵分别被转换为:

$$[K_2^e] = [R_2^e]^T \cdot [K_1^e] \cdot [R_2^e] \quad (14)$$

$$[M_2^e] = [R_2^e]^T \cdot [M_1^e] \cdot [R_2^e] \quad (15)$$

4. 综合离散法^[2]

$$\begin{aligned}
 \text{令 } U_M &= \sum_{i=1}^{p_1} a_i X_i(z_M - z_0) \\
 V_M &= \sum_{i=1}^{p_2} b_i X_i(z_M - z_0) \\
 \theta_M &= \sum_{i=1}^{p_3} c_i Z_i^*(z_M - z_0) \\
 w_{MN} &= \sum_{i=1}^{p_4} d_{Ni} Z_i(z_M) \\
 (M &= 1, 2, \dots, M_s, N = 1, 2, \dots, N_s)
 \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$Z_i(z) = \sin \left[\frac{(2i-1)\pi}{2H} \cdot z \right] \quad (17)$$

$$Z_i^*(z - z_0) = \begin{cases} 0 & (z \leq z_0) \\ \sin \left[\frac{(2i-1)\pi}{2(H-z_0)} (z - z_0) \right] & (z > z_0) \end{cases} \quad (18)$$

$$X_i(z - z_0) = \begin{cases} 0 & (z \leq z_0) \\ \cos \frac{\nu_i(z - z_0)}{H - z_0} - \operatorname{ch} \frac{\nu_i(z - z_0)}{H - z_0} - \alpha_i \left[\sin \frac{\nu_i(z - z_0)}{H - z_0} - \operatorname{sh} \frac{\nu_i(z - z_0)}{H - z_0} \right] & (z > z_0) \end{cases} \quad (19)$$

$$\alpha_i = \frac{\cos \nu_i + \operatorname{ch} \nu_i}{\sin \nu_i + \operatorname{sh} \nu_i} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= 1.875, \nu_2 = 4.694, \nu_3 = 7.855, \nu_4 = 10.996, \nu_5 = 14.137 \\ \nu_i &= (i - 0.5)\pi (i \geq 6) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由(16)-(21)式表达的广义节点位移, 预先已满足约束条件(4),(5)。再定义单元广义位移矢量:

$$\{\delta^e\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{p_1}, b_1, b_2, \dots, b_{p_2}, c_1, c_2, \dots, c_{p_3}, d_{N_1}, d_{N_2}, \dots, d_{N_{p_4}}, d_{N+1,1}, d_{N+1,2}, \dots, d_{N+1,p_4}\} \quad (22)$$

根据(16)式, 可以定出 $\{\delta^e\}$ 与 $\{\delta_2^e\}$ 之间的转换关系:

$$\{\delta_2^e\} = [R_3^e] \{\delta^e\} \quad (23)$$

因此对应于位移向量 $\{\delta^e\}$, 单元刚度矩阵和单元质量矩阵最后分别转换为:

$$[K^e] = [R_3^e]^T \cdot [K_2^e] \cdot [R_3^e] \quad (24)$$

$$[M^e] = [R_3^e]^T \cdot [M_2^e] \cdot [R_3^e] \quad (25)$$

最后定义总的广义位移向量:

$$\{\delta\} = \{a_1, \dots, a_{p_1}, b_1, \dots, b_{p_2}, c_1, \dots, c_{p_3}, d_{11}, \dots, d_{1p_4}, \dots, \dots, d_{N_s, 1}, \dots, d_{N_s, p_4}\} \quad (26)$$

把各个四边形单元的刚度矩阵 $[K^e]$ 及质量矩阵 $[M^e]$ 按对号入座的方式叠加组合,便可得到对应于广义位移矢量 $\{\delta\}$ 的总刚度矩阵 $[K]$ 及总质量矩阵 $[M]$ 。变分问题(6)最后归结为求广义特征值问题:

$$[K]\{\delta\} = \lambda[M]\{\delta\} \quad (27)$$

系统的总自由度为 $p_1 + p_2 + p_3 + N_s \times p_4$ 。如求前五阶固有频率,只需取 $p_i = 3 (i = 1, 2, 3, 4)$, $N_s = 16$, (自由度为57)即能满足工程上的要求。

四、算例与数值结果

本文选择一个横截面为矩形的薄壁棱柱体作为算例。计算结果见表1。表中同时给出了根据材料力学方法计算的弯曲振动固有频率,纵振频率和扭振频率(按薄壁杆件理论计算)作一比较。其中 f_1, f_4 和 f_2, f_5 分别是棱柱沿 x 方向和 y 方向的第一,第二阶弯曲振动固有频率; f_3 是棱柱的扭转振动固有频率。 f_6 是棱柱的纵向振动固有频率。

由表1可见,材料力学理论计算的结果,一般比综合离散法计算的结果偏大。这是因为梁理论的直法线假设比相对于本文采用的物理模型作了更多的限制,因而增大了物体的刚性。由表中还可以看出当棱柱高 H 比较小时(例如 $H = 800$ 厘米时)弯曲振动的固有频率 f_1, f_2, f_4, f_5 相差得就比较大。特别是 f_4, f_5 相差得更大些。这是由于梁理论必须在梁的跨度与横截面尺寸相比足够大的时候(一般要求 $\frac{H}{A} > 5$,其中 H 为梁跨度, A 代表横截面尺寸),计算结果才是可靠的。表中数据表明,随着 H 的增大,这种差别就越来

表1 底端固定的薄壁棱柱的固有振动频率*

Tab. 1. The Natural Frequencies of the Quadratic

Prism with Fixed Bottom

计算方法	H(厘米)	M_s	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_5
综合离散法	800	8	35.909	57.160	83.240	131.999	186.594	178.887
	1000	10	24.781	39.903	66.355	98.376	144.039	143.026
	1500	15	12.058	19.717	44.015	55.459	85.325	95.298
	2000	20	7.043	11.596	32.935	35.591	56.121	71.463
	3000	30	3.228	5.343	18.024	21.915	29.086	47.636
材料力学方法	800	8	43.862	74.284	85.270	274.923	465.606	178.609
	1000	10	28.072	47.542	68.216	175.951	297.988	142.887
	1500	15	12.476	21.129	45.477	78.201	132.439	95.258
	2000	20	7.018	11.886	34.108	43.988	74.497	71.443
	3000	30	3.114	5.274	22.739	19.550	33.110	47.629

* $A_1 = A_2 = 400$ 厘米, $B_1 = B_2 = 200$ 厘米, $E = 10^6$ 公斤/厘米², $\mu = 0.3$, $t = 1$ 厘米,

$\rho = 0.003/980$ 公斤·秒²/厘米⁴, $z_0 = 0$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 3$

**各阶频率 f 的单位为赫兹

越小。这些现象正说明了我们的理论弥补了梁理论的不足。对于变截面的薄壁桅杆，如果侧面板上又有加强筋，中间还有开洞，又有横隔板和多个集中质量的各种复杂情况，梁理论就更是无能为力了。

我们也计算了实际舰船桅杆的固有振动频率，并与按未进行简化的空间组合结构模型的SAP-5程序计算结果进行了比较（见表2）。

表2 实际舰船桅杆固有振动频率

Tab. 2. The Natural Frequencies of the Mast in ship

计算方法	未知量数目	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
综合离散法	57	8.983	9.536	29.971	35.215	36.178
空间组合结构(用SAP5程序)	360	8.823	9.283	31.030	37.006	38.728

本文提供的方法是既能保证计算精度又能大幅度节约计算机时的一种经济可靠的方法。还必须指出，本方法，不受约束条件(4)，(5)的限制，如桅杆根部是弹性约束，则只需在式(16)一(19)对应的基函数中增加一常数项，然后再将弹性元件的刚度矩阵迭加进去即可。本方法对广泛一类筒型薄壁构件也是适合的。

参 考 文 献

- [1] 刘世宁，李文钊等，舰船总纵强度有限元分析程序，武汉造船，1979，1。
- [2] 蔡承武，罗恩，郑永华，结构分析中的综合离散法，固体力学学报，1982，3。
- [3] 陈树辉，蔡承武，弹性力学平面问题的综合离散法，中山大学学报(自然科学版)，1985，1。
- [4] 陈树辉，蔡承武，刘世宁，直升机桨叶动力分析的综合离散法，振动与冲突，1985，2。

The Vibration Analysis of the Cylindrical Mast Using the Synthetic Discrete Method

Wu Huagan Cai Chengwu Pan Bilan Yan Hanging

Abstract

Presents the analysis of the natural vibration of the cylindrical mast in ship adopting the assumptions of both the membrane stress and the unvariability of the transverse section and using the synthetic discrete method. A numerical example is added in illustration of the proposed method. Some results of the calculation are given.

It is concluded that the synthetic discrete method is a better method which can not only reduce highly the number of the unknown independent variables, but also keep on enough accuracy.

Keywords natural vibration, Synthetic discrete method, assumptions of the membrane stress, assumptions of the unvariability of the transverse section.