

## 综合离散法在具有不规则边界的薄板弯曲问题中的应用

黄赅彪

(数学力学系)

综合离散法<sup>[1]</sup>与有限元法及有限条法相比,具有未知量少与适应性强的优点。本文在文[1]给出的关于薄板弯曲问题的一维综合节点位移模式的基础上,通过算例,检验了综合离散法适应于不规则边界的薄板弯曲问题,从而扩大了综合离散法的应用范围。

本文采用的公式、符号与文[1]相同。所给算例均以三节点九自由度的非完全协调三角形单元<sup>[2]</sup>为基本单元,采用一维综合离散法,所取节线均平行于整体坐标的 $x$ 轴。每一节线上的节点位移模式一般可表为

$$\left\{ \begin{aligned} w_i &= \sum_{m=1}^r a_m X_m(\xi_i), \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i &= \sum_{m=1}^r a_m X'_m(\xi_i), & (i=1,2,\dots,N) \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i &= \sum_{n=1}^p b_n \Phi_n(\xi_i) + \theta_0 \left( 1 - \frac{\xi_i}{l} \right) \sum_{m=1}^r a_m X'_m(0) \\ &\quad + \theta_1 \frac{\xi_i}{l} \sum_{m=1}^r a_m X'_m(l). \end{aligned} \right. \quad (1)$$

其中 $w_i$ ,  $\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i$ ,  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i$ 为该节线上第 $i$ 个节点的节点位移,  $\xi_i$ 为节线上第 $i$ 个节点的局部坐标,它与整体坐标的关系为 $\xi_i = x_i - x_1$ ,  $l$ 为节线长度,  $l = x_N - x_1$ , 基函数 $X_m$ ,  $\Phi_n$ 与参数 $\theta_0$ ,  $\theta_1$ 需视节线两端边界条件而定,  $a_1, a_2, \dots, a_r$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_p$ 为节线的广义坐标,每一节线有 $r+p$ 个自由度,不同的节线 $r$ 、 $p$ 可取不同的整数。

**问题1** 两对边简支、两对边自由的平行四边形板,在均布载荷 $q$ 作用下的弯曲。

板的尺寸与网格划分方式如图1所示。板厚 $t = 0.8\text{m}$ , 弹性模量 $E = 2.48 \times 10^6 \text{T/m}^2$ , 泊松比 $\nu = \frac{1}{3}$ , 均布载荷 $q = 1 \text{T/m}^2$ 。6条节线均平行于自由边,节线两端为简支,基函数取为

$$X_m(\xi) = \sin \frac{\mu_m \xi}{l} \quad (m=1,2,\dots,r)$$

本文1983年7月收到

本文得到蔡承武、罗恩副教授的指导。

$$\Phi_n(\xi) = \sin \frac{\nu_n \xi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots, p)$$

其中  $\mu_m = m\pi, \nu_n = n\pi, l$  为节线长, 节点位移模式中的参数为

$$\theta_0 = \frac{m_0}{l_0} = -\cos 67^\circ / (-\cos 23^\circ) = \text{ctg} 67^\circ$$

$$\theta_1 = \frac{m_1}{l_1} = \cos 67^\circ / \cos 23^\circ = \text{ctg} 67^\circ$$

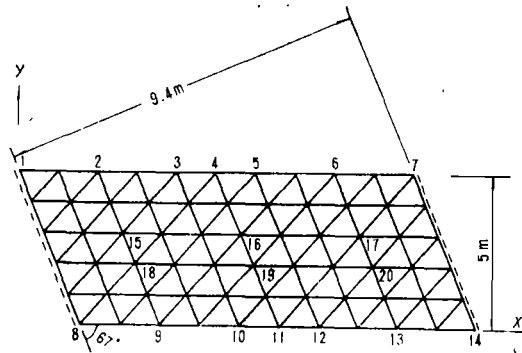


图1

表1列出了部分有代表性节点的挠度值。由表1可见, 综合离散法的基函数项数  $r = p = 3$  的情形, 计算得到的挠度值与有限元法的结果比较, 误差已在2%以内, 而未知量的数目只是有限元法的  $\frac{1}{3}$ 。

表1 平行四边形板在均布载荷作用下的挠度\* (单位cm)

方法	一维综合离散法		有限单元法 <sup>[3]</sup>
	r = p = 3 36	r = p = 5 60	198
自由度			
节点号 (见 图 1)	1	0	0
	2	0.0465	0.0469
	3	0.0787	0.0790
	4	0.0849	0.0849
	5	0.0827	0.0827
	6	0.0528	0.0531
	7	0	0
	8	0	0
	9	0.0528	0.0531
	10	0.0827	0.0827
	11	0.0849	0.0849
	12	0.0787	0.0790
	13	0.0465	0.0469
	14	0	0
	15	0.0465	0.0468
	16	0.0806	0.0807
	17	0.0473	0.0476
	18	0.0473	0.0476
	19	0.0806	0.0807
	20	0.0465	0.0468

\*表中的数值(包括文[3])为计算值的0.8倍,

**问题2** 两对边简支、两对边自由的斜板在均布载荷作用下的弯曲,

斜板的尺寸与网格划分方式如图2所示。弹性模量 $E=1.6 \times 10^6 T/m^2$ ，泊松比 $\nu=0.1667$ ，板厚 $t=0.7m$ ，均布载荷 $q=1T/m^2$ 。节线均平行于简支边。节线的边界条件为两端自由。基函数取为

$$X_m(\xi) = \begin{cases} 1, & m=1 \text{ 时}, \\ \frac{\xi}{l} - \frac{1}{2}, & m=2 \text{ 时}, \\ \cos \frac{\mu_{m-2}\xi}{l} + \cosh \frac{\mu_{m-2}\xi}{l} - \alpha_{m-2} \left( \sin \frac{\mu_{m-2}\xi}{l} + \sinh \frac{\mu_{m-2}\xi}{l} \right), & m=3, 4, \dots, r \text{ 时}, \end{cases}$$

其中  $\alpha_{m-2} = \frac{\cos \mu_{m-2} - \cosh \mu_{m-2}}{\sin \mu_{m-2} - \sinh \mu_{m-2}}$ ，而 $\mu_m$ 的取值为

m	1	2	3	4	5
$\mu_m$	4.73	7.8532	10.996	14.137	17.279

当 $m > 5$ 时， $\mu_m$ 近似取为 $\mu_m = (m + \frac{1}{2})\pi$ 。

$$\Phi_n(\xi) = \cos \frac{\nu_n \xi}{l}, \quad (n=1, 2, \dots, p),$$

其中 $\nu_n = (n-1)\pi$ 。(1)式中的参数 $\theta_0, \theta_1$ 均为零。

斜板有代表性节点的挠度与部分内力较大的单元形心处的弯距 $M_y$ 的计算值分别列于表2和表3。由表3可见，为了获得满意的内力值，所取基函数的项数必须适当增加。

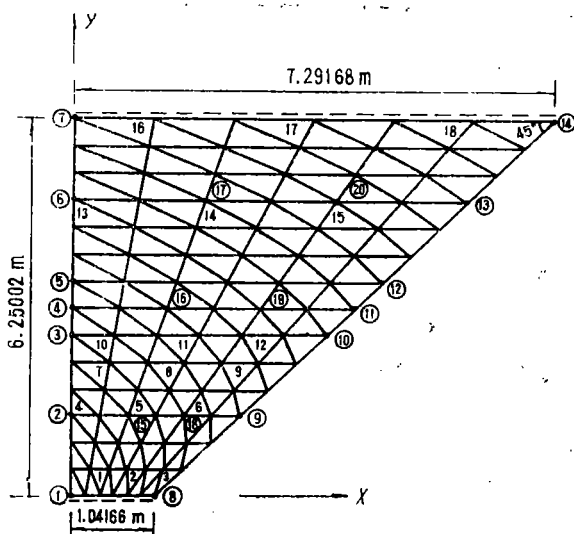


图 2

表2 斜板在均布载荷作用下的挠度值(单位cm)

方法	一维综合离散法			有限单元法 <sup>[3]</sup>	
	自由度	r = p = 3 90	r = p = 5 150		r = p = 7 210
节点号 (见图2)	①	0	0	0	0
	②	0.0316	0.0310	0.0311	0.0311
	③	0.0477	0.0472	0.0472	0.0473
	④	0.0485	0.0480	0.0480	0.0482
	⑤	0.0469	0.0465	0.0466	0.0467
	⑥	0.0296	0.0295	0.0296	0.0297
	⑦	0	0	0	0
	⑧	0	0	0	0
	⑨	0.0414	0.0460	0.0474	0.0475
	⑩	0.0595	0.0665	0.0668	0.0692
	⑪	0.0590	0.0660	0.0684	0.0689
	⑫	0.0557	0.0622	0.0646	0.0651
	⑬	0.0328	0.0365	0.0380	0.0383
	⑭	0	0	0	0
	⑮	0.0325	0.0333	0.0337	0.0337
	⑯	0.0495	0.0512	0.0519	0.0519
	⑰	0.0299	0.0312	0.0317	0.0316
	⑱	0.0357	0.0380	0.0388	0.0388
	⑳	0.0530	0.0575	0.0589	0.0591
		㉑	0.0310	0.0340	0.0350

**问题3** 两对边简支、两对边自由的棱形板在中心集中载荷 $P$ 作用下的弯曲。

棱形板边长 $l = 40m$ ，内锐角为 $45^\circ$ ，集中载荷 $P = 1T$ ，弹性模量 $E = 2 \times 10^9 T/m^2$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，板厚 $t = 1m$ ， $4 \times 4$ 网格划分方式如图3所示，图中 $OA, BC$ 边简支， $AB, OC$ 边自由，节线平行于自由边，节线两端简支，节点位移模式(1)中的基函数 $X_m(\xi)$ 、 $\Phi_n(\xi)$ 与问题1中的相同，而参数 $\theta_0 = \theta_1 = \text{ctg}45^\circ$ 。对四种网格进行了计算，板中心的挠度值列于表4。

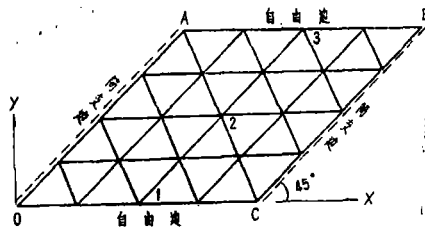


图3

表3 斜板在均布载荷作用下的弯矩 $M_y$ (单位T-m/m)

方 元 号 (见图2)	一维综合离散法			有限单元法 <sup>(3)</sup>
	$r=p=5$	$r=p=6$	$r=p=7$	
1	0.9083	1.077	1.090	1.094
2	0.9136	1.472	1.420	1.457
3	2.464	2.330	2.067	1.952
4	4.827	4.429	4.330	4.368
5	4.342	4.817	4.886	4.925
6	4.903	4.939	5.252	5.323
7	5.454	5.376	5.485	5.328
8	5.537	5.452	5.623	5.643
9	4.928	5.116	5.368	5.382
10	5.700	5.624	5.729	5.52
11	5.497	5.442	5.599	5.607
12	4.718	4.875	5.083	5.105
13	3.702	3.712	3.678	3.85
14	3.496	3.521	3.519	3.496
15	2.527	2.694	2.734	2.678
16	0.5729	0.5796	0.5823	0.505
17	0.4032	0.3845	0.4075	0.394
18	0.2135	0.1722	0.1746	0.179

表4 棱形板在中心集中载荷作用下的中心挠度(单位mm)

方 法	一维综合离散法( $r=p=5$ )				有限元法 <sup>(4)</sup>	
	4×4	6×6	8×8	12×12	6×6	12×12
中心挠度	0.09721	0.09387	0.09280	0.09195	0.08899	0.09158

## 参 考 文 献

- [1] 蔡承武、罗恩、郑永华, 固体力学学报, 1982, 3, 351—365.  
 [2] 华东水利学院, 弹性力学问题的有限单元法, 水利电力出版社, (1978), 168—172.  
 [3] 叶蜚章、丁荃荪, 受弯同性板有限单元法计算, 人民铁道出版社, 1979.  
 [4] 石钟慈, 样条有限元, 计算数学, 1979, 1, 66—67.