1986年第2期 中山大学学报 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIAERSITATIS SUNYATSENI №. 2, 1986

圆域上的双调和光顺样条*

黎罗罗
（计算机科学系）

摘要

本文讨论圆域上的最优光顺解，论证其特征性质及唯一可解性，說明它是双调和光顺样条；求解归结为系数矩阵对称非奇异的线性代数方程组；光顺参数的选择可与求解一并迭代进行。

设$x\in R^2$，取模为$\|\cdot\|_2$；Ω为R^2中的区域，有光滑边界$\partial\Omega$；$\{x^i\}_1^N$为Ω内N个点；以$w(x)$记定义在Ω上的函数，且记

$$B^0=\{w(x):w|_{\partial\Omega}=f^0\},\quad B^1=\{w(x):\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=f^1\}$$

$$B_0^0=\{w(x):w|_{\partial\Omega}=0\},\quad B_0^1=\{w(x):\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\}$$

其中n表示$\partial\Omega$的外法向，f^0，f^1为给定在$\partial\Omega$上的连续函数。

以$\{F_i\}_1^N$记一组实数。对给定参数$\alpha>0$，引入泛函

$$J(w)=\frac{\alpha}{2}\iint_\Omega(\Delta w)^2dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N[w(x^i)-F_i]^2$$

其中$\triangle$为拉普拉斯算符。

定义1 在容许函数集合(P)中极小化J的函数称为(P)中的最优光顺解（简称光顺解）。

定义2 $H^2(\Omega)\cap B^0\cap B^1$中的最优光顺解称为（Ⅰ）型最优光顺解（简称（Ⅰ）型光顺解）。

熟知，在固支边界条件下，若不计弯曲刚度因子，小挠度函数为w的弹性薄板之变形能为[1,2]

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega(\Delta w)^2dx$$

本文1984年11月收到
* 中国科学院科学基金资助课题

如果(Ⅰ)型光顺解理解为对上述薄板平衡时挠度w的要求：在点$\{x^i\}_1^N$处拟合带容许误差的观测或设计值而变形能极小，就得到定义1的力学背景。

§1 特征性质、存在唯一性及构造

对$i=1,2,\cdots,N$ 记$\Omega_i=\{x:\|x-x^i\|\leqslant\rho_i\}$，其中$\rho_i$为充分小的正数；记$Q=\{x^1, x^2,\cdots,x^N\}$。

定理1（特征性质）函数$s(x)$成为$H^2(\Omega)\cap H^4(\Omega\backslash Q)\cap B^0\cap B^1$中的最优光顺解，必要条件是：

(1) $s|_{\partial\Omega}=f^0$, $\quad \left.\dfrac{\partial s}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f^1$

(2) $\Delta^2 s=0 \quad x\in\Omega\backslash Q$

(3) $\lim\int_{\partial\Omega_i}\Delta s d\sigma=0 \quad (\rho_i\to 0)$，$i=1,2,\cdots,N$

(4) $\lim\int_{\partial\Omega_i}(\partial s/\partial n_i)d\sigma \quad (\rho_i\to 0)$为固定值，一般非零，其中$n_i$为$\partial\Omega_i$的外法向。

证明 记$\Omega_\rho=\Omega\backslash\bigcup\limits_{i=1}^N\Omega_i$及

$$J_\rho(w)=\frac{\alpha}{2}\iint\limits_{\Omega_\rho}(\Delta w)^2dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N[w(x^i)-F_i]^2$$

设s为定理所述光顺解，由Green公式知一阶变分

$$\delta J_\rho(s)=\alpha\iint\limits_{\Omega_\rho}(\Delta s)\,\delta\Delta s dx+\sum_{i=1}^N[s(x^i)-F_i]\delta s(x^i)$$

$$=\alpha\left\{\iint\limits_{\Omega_\rho}(\Delta^2 s)\,\delta s dx+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\Delta s\frac{\partial\delta s}{\partial n}-\frac{\partial\Delta s}{\partial n}\delta s\right)d\sigma-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^N\int\limits_{\partial\Omega_i}\left(\Delta s\frac{\partial\delta s}{\partial n_i}-\frac{\partial\Delta s}{\partial n_i}\delta s\right)d\sigma\right\}+\sum_{i=1}^N[s(x^i)-F_i]\delta s(x^i) \quad (1.1)$$

注意到$(\partial\delta s/\partial n_i)_{\partial\Omega_i}$可自由选取得与方向无关且趋于非零固定值，又注意到$\delta s|_{\partial\Omega}$、$(\partial s/\partial n)_{\partial\Omega}$必须是零值函数，故由(1.1)中取$\rho_i\to 0$及变分法原理，有(2)、(3)及

(4′) $\lim\alpha\int_{\partial\Omega_i}(\partial\Delta s/\partial n_i)d\sigma+[s(x^i)-F_i]=0$, $\rho_i\to 0 \quad i=1,2,\cdots,N$

成立。(1)的成立是显然的。结合定理2可知本定理给出(Ⅰ)型光顺解的特征。

定理2（唯一性）满足定理1中(1)—(3)及(4′)的函数$s\in H^2(\Omega)\cap H^4(\Omega\backslash Q)\cap B^0\cap B^1$必为唯一的(Ⅰ)型最优光顺解。

证明 由定理1的证明过程知，本定理的s是广义欧拉方程的解，即对一切$\delta s\in H^2(\Omega)\cap B_0^0\cap B_0^1$，有

$$\alpha\iint_{\Omega}(\Delta s)(\Delta\delta s)dx+\sum_{i=1}^{N}[s(x^i)-F_i]\delta s(x^i)=0$$

于是，若$s_1\epsilon H^2(\Omega)\cap B^0\cap B^1$，则$s_1-s\epsilon H^2(\Omega)\cap B_0^0\cap B_0^1$，记为$\delta s$，由上式可导得

$$J(s_1)=J(s)+\frac{\alpha}{2}\iint_{\Omega}(\Delta\delta s)^2\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}[\delta s(x^i)]^2\geqslant J(s)\tag{1.2}$$

可见(1)—(3)，(4′)确为$H^2(\Omega)\cap B^0\cap B^1$中函数成为最优光顺解的充分条件。另由(1.2)知(Ⅰ)型光顺解若存在则必唯一。因若s，s_1均为这样的解，记$\delta s=s_1-s$，则有

$$\iint_{\Omega}(\Delta\delta s)^2\,dx=0$$

从而δs是Ω上的调和函数，再由$\delta s|_{\partial\Omega}=0$，知在$\Omega$上有$\delta s=0$，即$s=s_1$。

定义 3（李岳生，1984）称如下式的函数

$$s(x)=\hat{s}(x)+\sum_{i=1}^{N}\beta_iG(x,x^i)\tag{1.3}$$

的全体为域Ω上的双调和样条函数空间，记为S。其中$\hat{s}$为Ω上的双调和函数，而

$$G(x,\xi)=\frac{1}{8\pi}(\|x-\xi\|^2\ln\|x-\xi\|)$$

为双调和方程的一个基本解，即$\Delta^2G(\cdot,\xi)=\delta(\cdot-\xi)$。

容易验证(1.3)中的函数$s\epsilon H^2(\Omega)$且满足定理1中的(2)—(4)。

定理 3（存在性）在S中唯一存在(Ⅰ)型最优光顺解s，s的求解归结为系数矩阵对称非奇的线代方程组。

证明 存在性的证明在于求得$s\epsilon S$，满足(1)、(4′)。唯一性已由定理2保证。

以$I(g,f;x)$记满足边界条件

$$I(g,f;x)=g(x)\qquad x\epsilon\partial\Omega$$
$$\partial I(g,f;x)/\partial n=f(x)$$

的Ω上的唯一双调和函数，S中函数可改表示为

$$s(x)=\hat{s}(x)+\sum_{i=1}^{N}\beta_iR_IG(x,x^i)\tag{1.4}$$

其中$\hat{s}$仍为双调和函数。$R_IG(x,\xi)=G(x,\xi)-I(G(x,\xi),\ \frac{\partial G(x.\xi)}{\partial n};\ x)$，在相当一些场合，可经由调和函数表出$I(g,f;x)$（见[3]）进而表出$R_IG(x,\xi)$。特别地，当$\Omega$为圆域$\Omega_0=\{x:\|x\|<a\}$时，

$$R_IG(x,\xi)=\frac{1}{8\pi}\left\{-\|x-\xi\|^2\ln\left(\frac{\|\xi\|}{a}\cdot\frac{\|x-\mu^2\xi\|}{\|x-\xi\|}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\|\xi\|^2}{a^2}\|x-\mu^2\xi\|^2-\|x-\xi\|^2\right)\right\}$$

其中$\mu=a/\|\xi\|$

由条件(1)知(1.4)中，$\hat{s}=I(f^0,f^1;x)$。尤其当$\Omega=\Omega_0$时[3]有

$$\hat{s}_0(x)=\frac{(r^2-a^2)^2}{2\pi a}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{-f^1}{r^2+a^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}d\varphi+\right.$$

$$+\int_0^{2\pi}\frac{f^0\cdot[a-r\cos(\varphi-\theta)]}{[r^2+a^2-2ar\cos(\varphi-\theta)]^2}d\varphi\Big\}$$

$x=r(\cos\theta,\sin\theta)$

注意到 $\lim\int_{\partial\Omega_i}\frac{\partial}{\partial n_i}\Delta G(x^i,x^j)=\delta_{ij}$ 及调和函数的积分性质，由要求(4′)可就(1.4)中诸β,建立方程组

$$\alpha\beta_i+\sum_{j=1}^{N}\beta_jR_IG(x^i,x^j)=F_i-\hat{s}(x^i)\qquad i=1,2,\cdots,N$$

即

$$(\alpha I+A)\beta=b \tag{1.5}$$

其中 $A=(a_{ij})_{N\times N}$， $a_{ij}=R_IG(x^i,x^j)$； $b=(b_1,b_2,\cdots,b_N)^T$，

$b_i=F_i-\hat{s}(x^i)$， $i=1,2,\cdots,N$； $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)^T$

(1.5)是N个未知量的N个方程，因而其解的存在性已寓于唯一性之中．从而确存在(I)型光顺解$s\in S$。

这又说明$\alpha I+A$非奇。A的(从而$\alpha I+A$的)对称性可于

$$\iint_\Omega(v\Delta^2u-u\Delta^2v)dx=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial\Delta u}{\partial n}-u\frac{\partial\Delta v}{\partial n}\right)d\sigma$$

中令$u(x)=R_IG(x,\xi)$，$v(x)=R_IG(x,\eta)$，导得$v(\xi)=u(\eta)$而知。

下面简要叙述(Ⅱ)型最优光顺解。

定义4 在$H^2(\Omega)\cap B^0$中的最优光顺解为(Ⅱ)型最优光顺解。

定理4 (Ⅱ)型最优光顺解唯一存在于双调和样条函数空间S，满足条件$s\in B^0$及$\Delta s\Big|_{\partial\Omega}=0$。求解归结为系数矩阵对称非奇的线代方程组。

以Ⅱ$(g,f;x)$记满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\text{Ⅱ}(g,f;x)=g(x)\\&\Delta\text{Ⅱ}(g,f;x)=f(x)\end{aligned}\right.\qquad x\in\partial\Omega$$

的Ω上的双调和函数。据拉普拉斯方程及泊松方程边值问题的理论，当g,f为连续函数时，Ⅱ$(g,f;x)$唯一存在。于是(Ⅱ)型光顺解可表为

$$s(x)=\hat{s}(x)+\sum_{j=1}^{N}\beta_jR_{II}G(x,x^j)$$

其中

$$\hat{s}(x)=\text{Ⅱ}(f^0,0;x)$$

$$R_{II}G(x,\xi)=G(x,\xi)-\text{Ⅱ}(G(x,\xi),\Delta G(x,\xi);x)$$

$\{\beta_i\}_1^N$ 由方程组

$$(\alpha I+A)\beta=b \tag{1.6}$$

确定，其中$A=(a_{ij})_{N\times N}$， $a_{ij}=R_{II}G(x^i,x^j)$； $b=(b_1,b_2,\cdots b_N)^T$， $b_i=F_i-\hat{s}(x^i)$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)^T$

当$\Omega=\Omega_0$时，有[3]

$$\mathrm{II}(g,f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-r^2)g}{r^2-2ar\cos(\theta-\varphi)+a^2}d\varphi+\iint_{\Omega}H(x,\eta)v(\eta)d\eta$$

$$x=r(\cos\theta,\sin\theta)$$

其中
$$H(x,\eta)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\|x-\eta\|-\ln\frac{\|\eta\|}{a}\|x-\mu^2\eta\|\right)$$

$$v(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-r^2)f}{r^2-2ar\cos(\theta-\varphi)+a^2}d\varphi,\quad \eta=r(\cos\theta,\sin\theta)$$

而

$$\hat{s}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a^2-r^2)f^0}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\varphi)}d\varphi$$

(Ⅰ)、(Ⅱ)型光顺解的以上方法还可以具体做到环形、扇形域。

§2　参数α的迭代选择

上述光顺解依赖于参数α：$s_\alpha(x)=\hat{s}(x)+\sum_{i=1}^{N}\beta_i(\alpha)RG(x,x^i)$，$R=R_I$或$R_{II}$。

α的选择，可取“残差原则”[4]即选择$\alpha>0$,使

$$\sum_{i=1}^{N}[s_\alpha(x^i)-F_i]^2=\varepsilon$$

其中$\varepsilon>0$为容许残差．记

$$\varepsilon_0=\sum_{i=1}^{N}[\hat{s}(x^i)-F_i]^2$$

$$\phi(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}[s_\alpha(x^i)-F_i]^2 \tag{2.1}$$

$$\mu=1/\alpha\ ,\quad \phi(\mu)=\phi(1/\mu)$$

对每个给定α所确定的泛函J，应有

$$\varepsilon\leqslant J(s_\alpha)\leqslant J(\hat{s})=\varepsilon_0$$

而$\phi(\mu)$是严格递减函数，因此在$\varepsilon<\varepsilon_0$范围内

$$\phi(\mu)=\varepsilon$$

有唯一解．其解可用牛顿迭代法解

$$1/\phi(1/\mu)=\varepsilon^{-1}$$

而得：
$$\mu_{p+1}=\mu_p-\mu_p^2\frac{\phi(1/\mu_p)}{\phi'(1/\mu_p)}\cdot\frac{\varepsilon-\phi(1/\mu_p)}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

因此每一迭代步的计算包括

(ｉ)　由$\alpha=\alpha_p=1/\mu_p$　解(1.5)或(1.6)得到

$$s=s_{\alpha_p}(x)\quad 及\quad \phi(\alpha_p)$$

(ii) 求$\phi'(\alpha_p)$。由(2.1)，它归结为求$\frac{d}{d\alpha}\beta_i(\alpha)$，后者可通过求解

$$(\alpha_p I + A)\frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} = -\beta(\alpha_p)$$

而得。注意这一方程组系数矩阵与(1.5)或(1.6)同，无须另外构造。

参 考 文 献

〔1〕钱伟长、叶开源，弹性力学，科学出版社，1980.

〔2〕黄义，弹性力学基础及有限单元法，冶金工业出版社，1983.

〔3〕A. H. 吉洪诺夫，A. A. 萨马尔斯基；数学物理方程，人民教育出版社，1963.

〔4〕G. I. Marchuk, *Methods of Numerical Mathematics*, Springer-Verlag. New York, 1982.

Smooth Biharmonic Splines on Circular Domain

Lee Luoluo

Abstract

Two types of smooth biharmonic splines defined on circular domain are introduced. Characteristic conditions, existence and uniqueness of a solution are given. Smooth parameter is selected by iterative method and the solution can be obtained by solving a sequence of systems of linear algebraic equations which possess non-singular symmetric coefficient matrices.