中 山 大 学 学 报

1986年第2期　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№. 2, 1986

·研究简报·

一种新的广义Hamilton变分原理

罗 恩

（力学系）

Hamilton原理是弹性动力学中最重要最基本的变分原理。本文建立了能包括时间端值条件在内的最完全的广义Hamilton变分原理，其泛函式为

$$\widehat{\Pi}_5(p_i,v_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_{t_1}^{t_2}\int_V\left[\frac{1}{2}\rho v_i v_i+p_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}-v_i\right)\right]dVdt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Pi_3(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})dt-\int_V\underline{\{[u_i(\vec{x},t_2)-\tilde{u}_{i2}(\vec{x})]}$$

$$\underline{p_i(\vec{x},t_2)-[u_i(\vec{x},t_1)-\tilde{u}_{i1}(\vec{x})]p_i(\vec{x},t_1)\}dV}$$

$$\widehat{\Gamma}_5(p_i,v_i,u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_{t_1}^{t_2}\int_V\left[\frac{1}{2\rho}p_i\ p_i-\frac{1}{2\rho}(\rho v_i-p_i)^2+\frac{\partial p_i}{\partial t}u_i\right]dVdt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Gamma_3(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})dt-\underline{\int_V[\tilde{u}_{i2}(\vec{x})p_i(\vec{x},t_2)-\tilde{u}_{i1}(\vec{x})p_i(\vec{x},t_1)]dV}$$

式中动量场p_i、速度场v_i、位移场u_i、应变场ε_{ij}及应力场σ_{ij}是独立无关的五类变量，而Π_3和Γ_3在形式上与胡海昌—鹫津变分原理的泛函相同。

$\widehat{\Pi}_5$和$\widehat{\Gamma}_5$分别为这种变分原理的势能形式和余能形式的泛函，且它们之间存在着下列互补关系

$$\widehat{\Pi}_5+\widehat{\Gamma}_5=0$$

不难证明，变分式$\delta\widehat{\Pi}_5=0$或$\delta\widehat{\Gamma}_5=0$等价于线弹性动力学的速度位移关系，动量速度关系，运动方程，应变位移关系，应力应变关系，边界条件和下列时间端值条件

$$u_i(\vec{x},t_1)=\tilde{u}_{i1}(\vec{x}),\quad u_i(\vec{x},t_2)=\tilde{u}_{i2}(\vec{x})$$

应当指出，对于不同的时间端值条件，$\widehat{\Pi}_5$和$\widehat{\Gamma}_5$中的划线项有不同的形式。例如，对于下列时间端值条件

$$p_i(\vec{x},t_1)=\tilde{p}_{i1}(\vec{x}),\quad p_i(\vec{x},t_2)=\tilde{p}_{i2}(\vec{x})$$

$\widehat{\Pi}_5$和$\widehat{\Gamma}_5$中的划线项应分别为

$$\int_V[\tilde{p}_{i2}(\vec{x})u_i(\vec{x},t_2)-\tilde{p}_{i1}(\vec{x})u_i(\vec{x},t_1)]dV$$

和

$$\int_V\{[p_i(\vec{x},t_2)-\tilde{p}_{i2}(\vec{x})]u_i(\vec{x},t_2)-[p_i(\vec{x},t_1)-\tilde{p}_{i1}(\vec{x})]u_i(\vec{x},t_1)\}dV;$$

对于下列时间端值条件

$$u_i(x,t_1)=\bar{u}_{i1}(\vec{x}),\quad p_i(\vec{x},t_2)=\bar{p}_{i2}(\vec{x})$$

$\widehat{\Pi}_5$和$\widehat{\Gamma}_5$中的划线项应分别为

$$\int_V \bar{p}_{i2}(\vec{x})u_i(\vec{x},t_2)-[u_i(\vec{x},t_1)-\bar{u}_{i1}(\vec{x})]p_i(\vec{x},t_1)\}dV$$

和

$$\int_V\{[p_i(\vec{x},t_2)-\bar{p}_{i2}(\vec{x})]u_i(\vec{x},t_2)-\bar{u}_{i1}(\vec{x})p_i(\vec{x},t_1)\}dV;$$

对于下列时间端值条件

$$p_i(\vec{x},t_1)=\bar{p}_{i1}(\vec{x}),\quad u_i(\vec{x},t_2)=\bar{u}_{i2}(\vec{x})$$

$\widehat{\Pi}_5$和$\widehat{\Gamma}_5$中的划线项应分别为

$$\int_V\{[u_i(\vec{x},t_2)-\bar{u}_{i2}(\vec{x})]p_i(\vec{x},t_2)-\bar{p}_{i1}(\vec{x})u_i(\vec{x},t_1)\}dV$$

和

$$\int_V\{\bar{u}_{i2}(\vec{x})p_i(\vec{x},t_2)-[p_i(\vec{x},t_1)-\bar{p}_{i1}(\vec{x})]u_i(\vec{x},t_1)dV$$

此外，作者还建立了各种形式的四类变量、三类变量、二类变量的广义Hamilton变分原理。而作为一种最特殊的情形，由$\widehat{\Pi}_5$和$\widehat{\Gamma}_5$分别可得

$$\widehat{\Pi}_H=\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_V\left(\frac{1}{2}\rho v_i v_i-\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+f_i u_i\right)dV+\int_{S_T}\overline{T_i}u_i dS\right]dt$$

$$\widehat{\Gamma}_c=\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_V\left(\frac{1}{2\rho}p_i\,p_i-\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)dV+\int_{S_u}\overline{u_i}T_i dS\right]dt$$

$$-\int_V[\bar{u}_{i2}(\vec{x})p_i(\vec{x},t_2)-\bar{u}_{i1}(\vec{x})p_i(\vec{x},t_1)]dV$$

$\widehat{\Pi}_H$就是Hamilton原理的泛函，而$\widehat{\Gamma}_c$则是Hamilton原理的余能形式的 泛函，它与现有文献中所见到的这种泛函的差别，就在于多了最后一个体积分项。

参 考 文 献

[1] Oden, J. T. and Reddy, C. T., *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[2] Wazhizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, *Pergamon*, 3nd, ed, 1982.

[3] Tabarrok, B., Complementary Variational Principles in Elastodynamics, *Computers and Structures*, 19(1984): 1-2.