中 山 大 学 学 报
1985年第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI №. 4, 1985

·研究简报·

一类二阶拟线性椭圆型方程边值问题解的一个积分恒等式及其应用

陈 宝 耀
（数学系）

本文证明下述Dirichlet问题：

$$\begin{cases} D_i(a^{ij}(x,u)D_ju)+f(u)=0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u=0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 内} \end{cases} \tag{1}$$

的解必须满足积分恒等式：

$$n\int_\Omega F(u)dx+\frac{2-n}{2}\int_\Omega uf(u)dx=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)a^{ij}(x,u)D_iuD_juds$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega(x_kD_ka^{ij})D_iuD_judx \tag{2}$$

并应用它来证明关于星形域 Ω 的边值问题：

$$\begin{cases} D_i(a^{ij}(xu)D_ju)+u^p+\lambda u=0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u>0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u=0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 内} \end{cases} \tag{3}$$

当 $\lambda\in\left(\frac{\alpha}{2}\lambda_1,\ \Lambda_1\right)$ 时无解。

1.积分恒等式的建立

首先考虑散度形拟线性方程的边值问题：

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{A}(x,u,Du)+f(u)=0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u=0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 内} \end{cases} \tag{4}$$

这里 $\vec{A}(x,u,Du)=(A(x,u,Du),\ \cdots A_n(x,u,Du))$。$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为适当光滑的有界区域，它的边界记作 $\partial\Omega$。$Du=(D_1u,\cdots D_nu)$ 表 $u(x)$ 的梯度。

用 $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\cdots\nu_n)$ 表 $\partial\Omega$ 的单位外法向量．由Green公式得：

$$\int_\Omega u\operatorname{div}\vec{A}dx=\int_{\partial\Omega}uA\nu ds-\int_\Omega A_iD_iudx$$

若 u 是（4）的解就有

$$\int_{\Omega} uf(u)\,dx=\int_{\Omega} A_i D_i u\,dx \tag{5}$$

记 $F(u)=\int_0^u f(t)\,dt$ 则 $F(u)\Big|_{\partial\Omega}=0$，从而有

$$0=\int_{\partial\Omega} F(u)\,(x\cdot\nu)\,ds=n\int_{\Omega} F(u)\,dx+\int_{\Omega}(x\cdot Du)f(u)\,dx$$

于是得

$$\int_{\Omega}(x\cdot Du)f(u)\,dx=-n\int_{\Omega} F(u)\,dx \tag{6}$$

再次利用 Green 公式及公式（5）得

$$\int_{\Omega} x_k D_k(A_i D_i u)\,dx=\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A_i D_i u\,ds-n\int_{\Omega} A_i D_i u\,dx$$

$$=\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A_i D_i u\,ds-n\int_{\Omega} uf(u)\,dx \tag{7}$$

由 $u\Big|_{\partial\Omega}=0$ 推知在 $\partial\Omega$ 上有

$$D_i u=\pm\nu_i|Du|$$

从而有

$$\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)A_i D_i u\,ds=\int_{\partial\Omega}(x\cdot Du)A_i\nu_i\,ds=\int_{\Omega}(x\cdot Du)D_i A_i\,dx+\int_{\Omega} A_i D_i(x\cdot Du)\,dx$$

$$=-\int_{\Omega}(x\cdot Du)f(u)\,dx+\int_{\Omega}(A_i D_i u+A_i x_k D_{ik}u)\,dx$$

$$=n\int_{\Omega} F(u)\,dx+\int_{\Omega} uf(u)\,dx+\int_{\Omega} A_i x_k D_{ik}u\,dx \tag{8}$$

假设方程的系数满足条件：

$$A_i(xuDu)=a^{ij}(xu)D_j u \tag{9}$$

由于 $D_k(A_i D_i u)=D_k a^{ij} D_i u D_j u+2a^{ij}D_{ik}u D_j u$

得：

$$\int_{\Omega} A_i x_k D_{ik}u\,dx=\frac{1}{2}\int_{\Omega} x_k D_k(A_i D_i u)\,dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}(x_k D_k a^{ij})D_i u D_j u\,dx \tag{10}$$

结合（7）、（8）、（10）式可得证下述定理：

定理 Dirichlet 问题（1）的解必须满足积分恒等式（2）。

2.应用举例

考虑边值问题（3），此时有

$$nF(u)+\frac{2-n}{2}uf(u)=\lambda u^2+\left(1-\frac{n}{2}+\frac{n}{P+1}\right)u^{P+1}$$

代入（2）式得

$$2\lambda\int_{\Omega} u^2\,dx+\left(2-n+\frac{2n}{P+1}\right)\int_{\Omega} u^{P+1}\,dx=\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)a^{ij}D_i u D_j u\,ds$$

$$+\int_{\Omega}(x_k D_k a^{ij})D_i u D_j u\,dx$$

假设方程是椭圆型的，即系数矩阵 $[a^{ij}(x,z)]$ 对所有 $(x,z)\in\mathscr{U}\subset\Omega\times\mathbf{R}$ 是正定的。若用 $\Lambda_1(x\ z)$ 表 $[a^{ij}(x\ z)]$ 的最小特征值，就有

$$0<\Lambda_1(x\ z)|\zeta|^2\leqslant a^{ij}(x\ z)\zeta_i\zeta_j \qquad \forall\zeta\in\mathbf{R}^n-\{0\}。\forall(x\ z)\in\mathscr{U}。$$

假设方程的系数满足条件：

$$[x_kD_ka^{ij}]=|x|\frac{\partial}{\partial x}[a^{ij}]\geqslant 0 \tag{11}$$

例如当 a^{ij} 为 x 的 m 次齐次式时有

$$[x_kD_ka^{ij}]=m[a^i{}_j]>0$$

于是存在 $\alpha\geqslant 0$　使有

$$x_kD_ka^{ij}D_iuD_ju\geqslant\alpha|Du|^2$$

若　$P=\dfrac{n+2}{n-2}$，利用 Poincare 不等式得

$$2\lambda\int_\Omega u^2dx\geqslant\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\Lambda_1(x\ u)|Du|^2ds+\alpha\lambda_1\int_\Omega u^2dx$$

这里 λ_1 为 $-\Delta$ 的最小特征值。

结论 1　设 Ω 是星形域且方程的系数满足条件(11)，若 $P=\dfrac{n+2}{n-2}$ 则当 $\lambda\leqslant\dfrac{\nu}{2}\lambda_1$ 时问题（ 3 ）无解。

若 $P>\dfrac{n+2}{n-2}$ 由（ 2 ）有

$$\lambda\int_\Omega u^2dx>\left(\frac{n}{2}-1-\frac{n}{P+1}\right)\int_\Omega u^{P+1}dx$$

由方程有

$$\int_\Omega a^{ij}D_iuD_judx=\int_\Omega(u^{P+1}+\lambda u^2)dx<\lambda\left[\left(\frac{n}{2}-1-\frac{n}{P+1}\right)^{-1}+1\right]\int_\Omega u^2dx$$

假设方程是严格椭圆的，即存在 $\mu_o>0$ 使有

$$a^{ij}(x,z)\zeta_i\zeta_j\geqslant\mu_o|\zeta|^2 \qquad \forall\zeta\in\mathbf{R}^n-\{0\}, \qquad \forall(x,z)\in\mathscr{U}$$

再次利用 Poincare 不等式得

$$\lambda^*\int_\Omega u^2dx<\lambda\int_\Omega u^2dx$$

这里

$$\lambda^*=\lambda_1\mu_o\frac{(n-2)P-n-2}{n(P-1)}$$

结论2.　假设 Ω 是星形域和方程是严格椭圆的，且系数满足条件(11)，若 $P>\dfrac{n+2}{n-2}$ 且 $\lambda\leqslant\lambda^*$ 则问题（ 3 ）无解。

现在考虑半线性情形：$a^{ij}=a^{ij}(x)$。假设方程是严格椭圆的且系数有界。根据线性

椭圆型方程的特征理论（参看〔1〕）知特征值问题：

$$\begin{cases} D_i(a^{ij}(x)D_ju)+\lambda u=0 & \text{在}\,\Omega\,\text{内} \\ u=0 & \text{在}\,\partial\Omega\,\text{内} \end{cases}$$

的最小特征值 $\Lambda_1>0$，它的非负特征函数记作 φ_1 于是有

$$\begin{cases} D_i(a^{ij}D_j\varphi_1)+\Lambda_1\varphi_1=0 & \text{在}\,\Omega\,\text{内} \\ \varphi_1\geqslant 0 & \text{在}\,\Omega\,\text{内} \\ \varphi_1=0 & \text{在}\,\partial\Omega\,\text{内} \end{cases} \tag{12}$$

考虑边值问题：

$$\begin{cases} D_i(a^{i}(x)D_ju)+u^p+\lambda u=0 & \text{在}\,\Omega\,\text{内} \\ u>0 & \text{在}\,\Omega\,\text{内} \\ u=0 & \text{在}\,\partial\Omega\,\text{内} \end{cases} \tag{13}$$

以它的解 u 乘方程（12）然后积分得

$$\Lambda_1\int_\Omega \varphi_1 u dx=\int_\Omega a^{ij}(x)D_iuD_j\varphi dx=-\int_\Omega \varphi_1 D_i(a^{ij}D_ju)dx$$

$$=\int_\Omega \varphi_1(u^p+\lambda u)dx>\lambda\int_\Omega \varphi_1 u dx$$

结论3 设方程是严格椭圆的，如果系数满足条件（11），且$\lambda\geqslant\Lambda_1$，则问题（13）无解。

参 考 文 献

〔1〕 D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Diffesential Equations of Second Order, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New york, 1977.