关于二类模糊自动机的等价性定理的注记

曹 勇

（计算机科学系）

文献〔1〕讨论了二类模糊自动机的等价性，但其证明过程有错误。本文给出证明，并提出了第三类模糊自动机，它与〔1〕中二类等价。

记 $R=[0,1]$。

定义1 一个最大积（max-product）自动机(MA)，是一个五元组

$$M=(\Sigma,S,P,h,g)$$

这里Σ和S是有限非空集，P是$S\times\Sigma\times S$到R的函数，h和g是S到R的函数。

在这定义里，Σ和S分别表示输入字符集和状态集，$P(s'|\mu,s)$表示M的当前状态为s,输入字符为μ，其下一状态为s'的资格函数。$h(s)$和$g(s)$分别表示M的状态s为开始状态和终止状态的资格函数。

定义2 Σ上的模糊语言是一个由Σ^*到R的函数f所确定的模糊集合。

定义3 设$M=(\Sigma,S,P,h,g)$是一MA。

1） P^M是从$S\times\Sigma^*\times S$到R的函数，使对每一$s',s''\in S$, $\mu\in\Sigma$和$x\in\Sigma^*$,

$$P^M(s''|\varepsilon,s')=\begin{cases}1 & 如果s'=s''\\0 & 否则\end{cases}\qquad(*)$$

和

$$P^M(s''|\mu x,s')=\max_{s\in S}[P(s|\mu,s')P^M(s''|x,s)].$$

2） f^M是一个Σ^*到R的函数，使对每$x\in\Sigma^*$,

$$f^M(x)=\max_{s,s'\in S}[h(s)P^M(s'|x,s)g(s')].$$

$f^M(x)$是x被M接受的资格函数。

定义4 第二类MA也是五元组

$$M'=(\Sigma,S,P,h,F)$$

其中Σ,S,P,h定义同前，F是S的非空子集。x被M'所接受的资格函数定义为

$$f^{M'}(x)=\max_{s'\in F}\max_{s\in S}[h(s)P^M(s'|x,s)]$$

定义5 二个MA: M,M'称为等价的，如果对每一$x\in\Sigma^*$, $f^M(x)=f^{M'}(x)$.记为$f^M=f^{M'}$。

定理 1)对每一 $MA,M=(\Sigma,S,P,h,F)$，都存在 $MA,M'=(\Sigma,S,P,h,g)$ 使得$f^M=f^{M'}$.

本文1983年10月收到

2) 对每一$MA, M=(\Sigma,S,P,h,g)$，也都存在一$MA, M'=(\Sigma,S',P',h',F)$使得$f^M=f^{M'}$。

证明 先证1) 我们由$M=(\Sigma,S,P,h,F)$构造

$$M'=(\Sigma,S,P,h,g)$$

其中
$$g(s)=\begin{cases}1 & \text{如果} s\in F\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

显然 $f^M=f^{M'}$。

现证2) 设$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$.定义 $M'=(\Sigma,S',P,h',F)$

其中
$$S'=\{s_1,s_2,\cdots s_n,s_{n+1},\cdots s_{2n}\}.$$
$$F=\{s_{n+1},\cdots,s_{2n}\}. \qquad F\cap S=\phi$$

对每一$\mu\in\Sigma$, $i,j=\overline{1,2n}$,

$$P'(s_j|\mu,s_i)=\begin{cases}P(s_j|\mu,s_i) & i,j=\overline{1,n}.\\ P(s_{j-n}|\mu,s_i)g(s_{j-n}) & i=\overline{1,n},\ j=\overline{n+1,2n}\\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$$

$$h'(s_i)=\begin{cases}h(s_i) & i=\overline{1,n}\\ h(s_{i-n})\cdot g(s_{i-n}) & i=\overline{n+1,2n}\end{cases}$$

要证明$f^M=f^{M'}$，只要证明如下事实：

对$j>n$, $x\in\Sigma^*$, $x\neq\varepsilon$,

$$P^{M'}(s_j|x,s_i)=\begin{cases}P^M(s_{j-n}|x,s_i)\cdot g(s_{j-n}) & i\leqslant n\\ 0 & i>n.\end{cases}$$

这只要对x的长度施归纳法证明即可。

由此，对$x\in\Sigma^*$, $x\neq\varepsilon$时

$$f^{M'}(x)=\max_{s_j\in F}\max_{s_i\in S'}[h'(s_i)p^{M'}(s_j|x,s_i)]$$
$$=\max_{s_j\in F}\max_{s_i\in S}[h(s_i)P^M(s_{j-n}|x,s_i)\cdot g(s_{j-n})]=f^M(x).$$

当$x=\varepsilon$时，对$j>n$

$$P^M(s_j|\varepsilon,s_i)=p^{M'}(s_j|\varepsilon,s_i)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$f^{M'}(\varepsilon)=\max_{s_j\in F}\max_{s_i\in S'}[h'(s_i)\cdot P^{M'}(s_j|\varepsilon,s_i)]$$
$$=\max_{s_j\in F}\max_{s_i\in F}[h(s_{i-n})\cdot g(s_{i-n})\cdot P^{M'}(s_j|\varepsilon,s_i)]$$
$$=\max_{s_j\in F}[h(s_{j-n})\cdot g(s_{j-n})]=\max_{s_i\in S}[h(s_i)\cdot g(s_i)]$$

$$f^M(\varepsilon)=\max_{s_i,s_j\in S}[h(s_i)P^M(s_j|\varepsilon,s_i)\cdot g(s_j)]=\max_{s_i\in S}[h(s_i)g(s_i)]$$

$\therefore f^{M'}(\varepsilon)=f^M(\varepsilon)$。 即

对任一$x\in\Sigma^*$，$f^M(x)=f^{M'}(x)$。故$f^M=f^{M'}$。〔证毕〕。

如果我们将定义3中的(*)式改为

$$P^M(s''|\varepsilon,s')=\begin{cases}g(s') & s''=s'\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad (*)'$$

那末对第三类MA，$M''=(\Sigma,S,P,h,g,F)$，各项的定义同前，M''接受x的资格函数定义为：

$$f^{M''}(x)=\max_{s'\in F}\max_{s\in S}\,[h(s)P_1^{M''}(s'|x,s)]$$

其中$P_1^{M''}$是在定义3中用(*)′代替(*)所定义的函数。则$f^{M''}=f^M=f^{M'}$。其正确性证明仿照前面定理的证明很容易得出。

参考文献

[1] E.S. Santos, "Fussy Automata and Languages", Information Sciences 10, 193-197 (1976). Also in Selected Papers on Theory and Applications of Fussy Mathematics, Part 2, 521-525 (1979).