

变截面开口薄壁杆件的有限分析法

郭金基 黄赅彪

(力学系)

摘要

本文阐述变截面开口薄壁杆件的有限分析法。利用杆的边界条件和单元体之间的连接条件,建立初参数的传递矩阵,化为数值解。并进行了误差分析,最后给出了算例。

文[1]、[2]继有限差分法(FD)、有限单元法(FE)之后,提出了一种新的求解偏微分方程式的数值方法,称为有限分析法(FA),其实质上是一个局部解析解与全局数值解相结合的方法。本文应用FA法的基本思想求解变截面开口薄壁杆件的弯曲、扭转微分方程组。

一、弯曲、扭转问题的有限分析法

变截面开口薄壁杆件弯曲、扭转问题归结为四阶变系数常微分方程组的边值问题。以图1所示的实界线II形截面杆为例。其中 b 为副极点,取为直角坐标系的原点。 ox 轴取为截面的对称轴, oz 轴沿杆的轴线方向, $oxyz$ 形成右手系。载荷 p 作用点的坐标为 $(0,0,z_p)$,

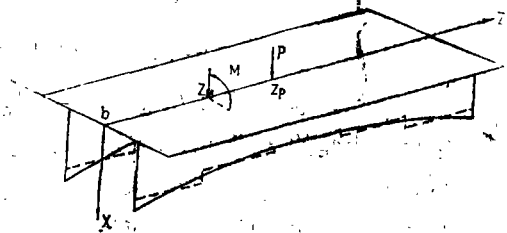


图 1

扭矩 M 的作用点 z 坐标为 z_M ,杆的扭转翘曲问题归结如下模型的边值问题^[3]。

$$\begin{cases}
 \frac{d}{dz} (EF \frac{d\xi}{dz}) - \frac{d}{dz} (E S_y \frac{d^2 \xi}{dz^2}) = 0, \\
 \frac{d^2}{dz^2} (E J_x \frac{d^2 \eta}{dz^2}) + \frac{d^2}{dz^2} (E J_{wbx} \frac{d^2 \theta}{dz^2}) = 0, \\
 -\frac{d^2}{dz^2} (E S_y \frac{d\xi}{dz}) + \frac{d^2}{dz^2} (E J_y \frac{d^2 \xi}{dz^2}) = p \delta(z - z_p), \\
 \frac{d^2}{dz^2} (E J_{wbx} \frac{d^2 \eta}{dz^2}) + \frac{d^2}{dz^2} (E J_{wb} \frac{d^2 \theta}{dz^2}) - \frac{d}{dz} (G J_d \frac{d\theta}{dz}) \\
 = M \cdot \delta(z - z_M).
 \end{cases} \quad (1)$$

本文1984年9月收到

(1)式中, E 为材料的杨氏模量, G 为剪切模量, F 是杆的截面积, S_y 是截面对 y 轴的静矩, J_x 、 J_y 分别是截面对 x 、 y 轴的惯矩, $J_{wbx} = \int_F w_b \cdot y dF$ 是截面对副极点 b 的扇性离心惯性矩, J_d 是扭转惯性矩. $J_{wb} = \int_F w_b^2 dF$ 是截面对副极点 b 的扇性惯性矩. $\delta(z - z_p)$, $\delta(z - z_M)$ 是 δ 函数(当 $z = z_p$ 、 z_M 时 $\delta = 1$, 其余为0).

边界条件为:

$$(1) \text{ 固定支承: } \begin{cases} \xi = \eta = \theta = \zeta = 0 \\ \xi' = \eta' = \theta' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \text{ 固定铰支承: } \begin{cases} \xi = \eta = \theta = \zeta = 0 \\ \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) \text{ 活动铰支承: } \begin{cases} \xi = \eta = \theta = 0 \\ \xi'' = \eta'' = \theta'' = \zeta' = 0 \end{cases} \quad (4)$$

寻求(1)至(4)的解析解是十分困难的. 本文采用有限分析的近似解法, 把变系数的(1)简化为常系数问题. 具体做法是: 用垂直于杆轴线的平面(称为界面)把杆分割成若干段, 每段称为单元体, 把每个单元体近似为等截面体, 从而把杆的光滑曲面边界面近似为阶梯面(如图1中的虚线所示). 因此, 在同一单元体内, 截面的几何量 F 、 J_x 、 J_y 、 S_w 、 S_y 、 J_{wb} 、 J_d 是常量. 于是对每一个单元体, 方程组(1)简化为:

$$EF\xi'''' - ES_y\xi'''' = 0 \quad (5-1)$$

$$EJ_x\eta^{(4)} + EJ_{wbx}\theta^{(4)} = 0 \quad (5-2)$$

$$-ES_y\xi'''' + EJ_y\xi^{(4)} = p \cdot \delta(z - z_p) \quad (5-3)$$

$$EJ_{wbx}\eta^{(4)} + EJ_{wb}\theta^{(4)} - GJ_d\theta'' = M \cdot \delta(z - z_M) \quad (5-4)$$

上式中字母右上角的“'”和“(4)”表示对 z 求导数.(5)式是常系数常微分方程, 在每一个单元体内, 它们可以用初参数法求出分析解. 这些解在内部单元之间应满足动力学与静力学连接条件; 在边界单元体上应满足端面的约束条件.

为了便于求解方程组(5), 今用几何特征量的关系加以简化:

$$J_{yc} = J_y - S_y^2/F, \quad J_{wa} = J_{wb} - J_{wbx}^2/J_x \quad (6)$$

(6)式中 J_{yc} 为杆过截面形心 c 的 y 轴的主惯性矩, J_{wa} 为主极点 a 的主扇性矩. 并引入记号

$$\alpha^2 = GJ_d/EJ_{wa} \quad (7)$$

将(6)、(7)式代入(5), 并移项得

$$\xi'' - \frac{\zeta y}{F} \xi'' = 0 \quad (8-1)$$

$$\eta^{(4)} + \frac{J_{wbx}}{J_x} \theta^{(4)} = 0 \quad (8-2)$$

$$EJ_{yc} \xi^{(4)} = p \cdot \delta(z - z_p) \quad (8-3)$$

$$\theta^{(4)} - \alpha^2 \theta'' = M \cdot \delta(z - z_M)/EJ_{wa} \quad (8-4)$$

(8-1)~(8-4) 分别表示等截面开口薄壁杆单元体的拉压, y 方向弯曲、 x 方向弯曲和约束扭转的微分方程。以下应用初参数法分别求出它们的分析解, 利用单元体之间的连接条件导出传递矩阵, 最后利用杆的边界条件, 建立以杆左端面参数 (称为杆的初参数) 为基本未知量的代数方程组。

1. 约束扭转问题

设第 i 个单元体上作用有扭矩 M_i , M_i 作用面的 z 坐标为 z_M , 则约束扭转问题的微分方程(8-4)的分析解为:

$$\begin{aligned} \theta_i(z) = & \theta_i^0 + \theta_i^{\prime 0} \frac{\text{sh}\alpha_i(z-z_i)}{\alpha_i} + \frac{B_i^0}{GJ_{d_i}} [1 - \text{ch}\alpha_i(z-z_i)] \\ & + \frac{M_i^0}{\alpha_i GJ_{d_i}} [\alpha_i(z-z_i) - \text{sh}\alpha_i(z-z_i)] \\ & + \parallel_{z_M} \frac{M_i}{\alpha_i GJ_{d_i}} [\alpha_i(z-z_M) - \text{sh}\alpha_i(z-z_M)] \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 θ_i^0 、 $\theta_i^{\prime 0}$ 、 B_i^0 、 M_i^0 分别为第 i 个单元体左端面的扭角、扭率、双力矩和扭矩, 记为

$$\mathbf{H}_i^0 = [\theta_i^0, \theta_i^{\prime 0}, B_i^0, M_i^0]^T, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

称为第 i 个单元体约束扭转问题的初参数的状态向量。在边界上, \mathbf{H}_i^0 要满足边界条件, 在单元体之间, 它要满足连续条件, 即

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{i-1} = \theta_i^0, \quad \bar{\theta}'_{i-1} = \theta_i^{\prime 0}, \quad \bar{B}_{i-1} = B_i^0 \\ GJ_{d_{i-1}} \bar{\theta}''_{i-1} - EJ_{\omega i-1} \bar{\theta}'''_{i-1} = GJ_{d_i} \theta_i^{\prime 0} - EJ_{\omega i} \theta_i^{\prime \prime 0} \end{cases} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (10)$$

(10) 式中 $\bar{\theta}_{i-1}$ 、 $\bar{\theta}'_{i-1}$ 、 \bar{B}_{i-1} 为第 $i-1$ 个单元体右端面的扭角、扭率和双力矩, $\bar{\theta}'''_{i-1}$ 是 $\bar{\theta}_{i-1}$ 关于 z 的三阶导数。记 $\mathbf{H}_i = [\bar{\theta}_i, \bar{\theta}'_i, \bar{B}_i, \bar{M}_i]^T$ 。

由(9)、(10)两式可得相邻单元体的初参数状态向量之间的关系如下:

$$\mathbf{A}^{(i)} \mathbf{H}_i^0 + M_i \mathbf{E}_i = \mathbf{H}_{i+1}^0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_i} \text{sh}\alpha_i(z_{i+1}-z_i) & \frac{1}{GJ_{d_i}} [1 - \text{ch}\alpha_i(z_{i+1}-z_i)] \\ 0 & \text{ch}\alpha_i(z_{i+1}-z_i) & -\frac{\alpha_i}{GJ_{d_i}} \text{sh}\alpha_i(z_{i+1}-z_i) \\ 0 & \frac{-GJ_{d_i}}{\alpha_i} \text{sh}\alpha_i(z_{i+1}-z_i) & \text{ch}\alpha_i(z_{i+1}-z_i) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_i G J d_i} [\alpha_i (z_{i+1} - z_i) - \text{sh} \alpha_i (z_{i+1} - z_i)] \\ \frac{1}{G J d_i} [1 - \text{ch} \alpha_i (z_{i+1} - z_i)] \\ \frac{\text{sh} \alpha_i (z_{i+1} - z_i)}{\alpha_i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$\mathbf{A}^{(i)}$ 和 \mathbf{E}_i 分别称为第 i 个单元体扭转问题的传递矩阵和扭矩 M_i 的影响矩阵。

由(11)式可得杆的初参数状态向量 \mathbf{H}_1^0 与杆右端面参数的状态向量 $\overline{\mathbf{H}}_n$ 的关系如下

$$\mathbf{A} \mathbf{H}_1^0 + M_i \mathbf{A}_i \mathbf{E}_i = \overline{\mathbf{H}}_n \quad (12)$$

其中 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(n)} \mathbf{A}^{(n-1)} \dots \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{A}^{(1)}$, 称为杆扭转问题的传递矩阵。

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}^{(n)} \mathbf{A}^{(n-1)} \dots \mathbf{A}^{(i+1)} \quad (i < n-1); \quad \mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{A}^{(n)}; \quad \mathbf{A}_n = 1.$$

(12)式左端第二项称为扭矩影响项, 若杆受已知扭矩的数目为 k ($k \geq 0$, 是整数), 则它应为相应的 k 项之和。其中 M_i 是作用在第 i 个单元体上的扭矩。

利用边界条件和(12)式, 可求得 \mathbf{H}_1^0 , 再利用(11)式便可求得杆的所有界面的参数状态向量 \mathbf{H}_i^0 ($i = 2, 3, \dots, n$)。

2. x轴方向的弯曲问题

设杆第 i 个单元体上作用有集中载荷 P_i (沿 x 方向), P_i 作用点的 z 坐标为 z_p , 则杆沿 x 轴方向的弯曲问题的微分方程(8-3)的分析解为

$$\xi_i(z) = \xi_i^0 + \xi_i^{\prime 0} (z - z_i) - \frac{M_{y_i}^0 (z - z_i)^2}{2EJ_{y_i}} - \frac{Q_{x_i}^0 (z - z_i)^3}{6EJ_{y_i}} + \left\| \begin{matrix} P_i (z - z_p)^3 \\ z_p \end{matrix} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

上式中 ξ_i^0 , $\xi_i^{\prime 0}$, $M_{y_i}^0$, $Q_{x_i}^0$ 是 i 单元体左端面的挠度、转角、弯矩和剪力, 记为

$$\mathbf{V}_i^0 = [\xi_i^0, \xi_i^{\prime 0}, M_{y_i}^0, Q_{x_i}^0]^T, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

称为*i*单元体沿*x*方向弯曲问题的初参数状态向量。

类似前述有:

$$\bar{l}_{i-1} = l_i^0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \tag{14}$$

其中 \bar{l}_{i-1} 是 *i*-1 单元体右端面参数的状态向量 $\bar{l}_{i-1} = [\bar{\xi}_{i-1}, \bar{\xi}'_{i-1}, \bar{M}_{y_{i-1}}, \bar{Q}_{x_{i-1}}]^T$ 。

由(13)、(14)式可得

$$B^{(i)} l_i^0 + P_i J_i = l_{i+1}^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \tag{15}$$

其中

$$B^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & z_{i+1} - z_i & -\frac{(z_{i+1} - z_i)^2}{2EJ_{y_i}} & -\frac{(z_{i+1} - z_i)^3}{6EJ_{y_i}} \\ 0 & 1 & -\frac{(z_{i+1} - z_i)}{EJ_{y_i}} & -\frac{(z_{i+1} - z_i)^2}{2EJ_{y_i}} \\ 0 & 0 & 1 & z_{i+1} - z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

称为*x*方向弯曲问题第*i*个单元体的传递矩阵。

$$J_i = \left[\frac{(z_{i+1} - z_p)^3}{6EJ_{y_i}}, \frac{(z_{i+1} - z_p)^2}{2EJ_{y_i}}, -(z_{i+1} - z_p), -1 \right]^T, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

称为集中载荷*P_i*的影响阵。

由(14)、(15)式可得

$$B l_1^0 + P_i B_i J_i = \bar{l}_n \tag{16}$$

(16)式中

$$B = B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(2)} B^{(1)},$$

$$B_i = B^{(n)} B^{(n-1)} \dots B^{(i+1)}, \quad (i < n-1); \quad B_{n-1} = B^{(n)}; \quad B_n = 1$$

称*B*为*x*方向弯曲问题杆的传递矩阵。

$$l_1^0 = [\xi_1^0, \xi_1'^0, M_{y_1}^0, Q_{x_1}^0]^T,$$

$$\bar{l}_n = [\bar{\xi}_n, \bar{\xi}'_n, \bar{M}_{y_n}, \bar{Q}_{x_n}]^T,$$

l_1^0 、 \bar{l}_n 分别为杆沿*x*方向弯曲问题的初参数和杆右端面参数的状态向量。

利用边界条件和(16)式,可求得 l_1^0 ,再利用(15)式便可求得杆任意界面的参数状态向量 $l_i^0 (i = 2, 3, \dots, n)$ 。

3. *y*轴方向的弯曲问题

杆第*i*个单元体沿*y*轴方向弯曲问题的微分方程(8-2)的分析解为

$$\begin{aligned} \eta_i(z) = & \eta_i^0 + \eta_i^{\prime 0}(z - z_i) - \frac{M_{x_i}^0 (z - z_i)^2}{2EJ_{x_i}} - \frac{Q_{y_i}^0 (z - z_i)^3}{6EJ_{x_i}} \\ & + \beta_i \theta_i^{\prime 0} \left[(z - z_i) - \frac{\text{sh}\alpha_i(z - z_i)}{\alpha_i} + \frac{\alpha_i^2}{6} (z - z_i)^3 \right] \\ & - \frac{\beta_i B_i^0}{GJ_{d_i}} \left[\alpha_i^2 \frac{(z - z_i)^2}{2} + 1 - \text{ch}\alpha_i(z - z_i) \right] - \frac{\beta_i M_i^0}{\alpha_i GJ_{d_i}} \left[\frac{\alpha_i^3}{6} (z - z_i)^3 \right. \\ & \left. + \alpha_i(z - z_i) - \text{sh}\alpha_i(z - z_i) \right] - \left\| z_M \frac{\beta_i M_i}{\alpha_i GJ_{d_i}} [\alpha_i(z - z_M) - \text{sh}\alpha_i(z - z_M)] \right\| \quad (17) \end{aligned}$$

(17)式中 $\beta_i = \frac{J_{wbxi}}{J_{x_i}}$, η_i^0 , $\eta_i^{\prime 0}$, $M_{x_i}^0$, $Q_{y_i}^0$ 为*i*单元体左端面的挠度、转角、弯矩和剪力, 记为

$$\mathbf{L}_i^0 = [\eta_i^0, \eta_i^{\prime 0}, M_{x_i}^0, Q_{y_i}^0], \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

称为*i*单元体沿*y*轴方向弯曲问题的初参数状态向量。在边界上, 它们要满足的边界条件, 在单元体之间要满足连接条件, 即

$$\bar{\mathbf{L}}_{i-1} = \mathbf{L}_i^0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (18)$$

其中 $\bar{\mathbf{L}}_{i-1} = [\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_{i-1}^{\prime}, \bar{M}_{x_{i-1}}, \bar{Q}_{y_{i-1}}]^T$ 是*i-1*单元体右端面参数状态向量。由(17)、(18)式可得

$$\mathbf{C}^{(i)} \mathbf{L}_i^0 + \mathbf{K}^{(i)} \boldsymbol{\Psi}_i^0 + M_i \mathbf{F}_i = \mathbf{L}_{i+1}^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (19)$$

其中, $\mathbf{C}^{(i)}$ 称为第*i*个单元体沿*y*方向弯曲问题的传递矩阵; 只要将 $\mathbf{B}^{(i)}$ 中 J_{y_i} 用 J_{x_i} 代替, 其形式与 $\mathbf{B}^{(i)}$ 完全相同。

$$\boldsymbol{\Psi}_i^0 = [\theta_i^{\prime 0}, B_i^0, M_i^0]^T, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

其中 $\theta_i^{\prime 0}$, B_i^0 , M_i^0 为*i*单元体扭转问题的初参数。

$$\mathbf{K}^{(i)} = \beta_i \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_i} (\alpha_i l_i - \text{sh}\alpha_i l_i + \frac{\alpha_i^3 l_i^3}{6}) & -\frac{1}{GJ_{d_i}} (\alpha_i^2 \frac{l_i^2}{2} + 1 - \text{ch}\alpha_i l_i) \\ (1 - \text{ch}\alpha_i l_i + \frac{\alpha_i^2}{2} l_i^2) & -\frac{\alpha_i}{GJ_{d_i}} (\alpha_i l_i - \text{sh}\alpha_i l_i) \\ EJ_{x_i} \alpha_i (\text{sh}\alpha_i l_i - \alpha_i l_i) & \frac{EJ_{x_i} \alpha_i^2}{GJ_{d_i}} (1 - \text{ch}\alpha_i l_i) \\ EJ_{x_i} \alpha_i (\text{ch}\alpha_i l_i - 1) & -\frac{EJ_{x_i} \alpha_i^3}{GJ_{d_i}} \text{sh}\alpha_i l_i \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{-1}{\alpha_i G J_{d_i}} \left(\frac{\alpha_i^3 l_i^3}{6} + \alpha_i l_i - \text{sh} \alpha_i l_i \right) \\
 & \frac{-1}{G J_{d_i}} \left(\frac{\alpha_i^2 l_i^2}{2} + 1 - \text{ch} \alpha_i l_i \right) \\
 & \frac{E J_{x_i} \alpha_i}{G J_{d_i}} (\alpha_i l_i - \text{sh} \alpha_i l_i) \\
 & \frac{E J_{x_i}}{G J_{d_i}} \alpha_i^2 (1 - \text{ch} \alpha_i l_i)
 \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

其中 $l_i = z_{i+1} - z_i$. 称 $\mathbf{K}^{(i)}$ 为扭转变形影响阵.

$$\mathbf{F}_i = \frac{-\beta_i}{G J_{d_i}} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_i(z_{i+1} - z_M) - \text{sh} \alpha_i(z_{i+1} - z_M)}{\alpha_i} \\ 1 - \text{ch} \alpha_i(z_{i+1} - z_M) \\ E J_{x_i} \alpha_i \text{sh} \alpha_i(z_{i+1} - z_M) \\ E J_{x_i} \alpha_i^2 \text{ch} \alpha_i(z_{i+1} - z_M) \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

M_i 是作用在 i 单元体上的扭矩.

由 (18)、(19) 式可得

$$\mathbf{C} \mathbf{L}_1^0 + \mathbf{K} = \bar{\mathbf{L}}_n \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \mathbf{C}^{(n)} \mathbf{C}^{(n-1)} \dots \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{C}^{(1)}, \\
 \mathbf{K} &= \mathbf{C}^{(n)} \mathbf{C}^{(n-1)} \dots \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{K}^{(1)} \Psi_1^0 + \mathbf{C}^{(n)} \mathbf{C}^{(n-1)} \dots \mathbf{C}^{(3)} \mathbf{K}^{(2)} \Psi_2^0 \\
 &+ \dots + \mathbf{C}^{(n)} \mathbf{K}^{(n-1)} \Psi_{n-1}^0 + \mathbf{K}^{(n)} \Psi_n^0 + M_i \mathbf{C}^{(n)} \mathbf{C}^{(n-1)} \dots \mathbf{C}^{(i+1)} \mathbf{F}_i
 \end{aligned}$$

称 \mathbf{C} 为杆沿 y 方向弯曲问题的传递矩阵.

$$\mathbf{L}_1^0 = [\eta_1^0, \eta_1^{\prime 0}, M_{x_1}^0, Q_{y_1}^0]^T,$$

$$\bar{\mathbf{L}}_n = [\bar{\eta}_n, \bar{\eta}_n^{\prime 0}, \bar{M}_{x_n}, \bar{Q}_{y_n}]^T,$$

分别称为杆沿 y 方向弯曲问题的初参数和右端面参数的状态向量.

利用 (20) 式、边界条件以及 (19) 式便可得到问题的解答.

4. 轴向拉压问题

杆第 i 单元体轴向拉压的微分方程 (8-1) 的分析解为

$$\zeta_i(z) = \zeta_i^0 + \frac{N_i^0}{E F_i} (z - z_i) - \frac{x_{c_i} Q_{x_i}^0}{2 E J_{y_i}} (z - z_i)^2 + \int_{z_p} \frac{x_{c_i} p_i (z - z_p)^2}{2 E J_{y_i}} \quad (21)$$

式中 $x_{c_i} = S_{y_i} / F_i$, ζ_i^0 , N_i^0 是 i 单元体的轴向位移和内力, 记为

$$\mathbf{T}_i^0 = [\mathbf{S}_i^0, \mathbf{N}_i^0]^T,$$

称为 i 单元体轴向拉压问题的初参数状态向量。在边界上, 要求满足支承条件, 在单元体之间要求满足内力及位移的连接条件, 可得:

$$\mathbf{D}^{(i)} \mathbf{T}_i^0 + Q_{x_i}^0 \mathbf{G}_i + p_i \mathbf{S}_i = \mathbf{T}_{i+1}^0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{D}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z_{i+1} - z_i}{EF_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_{c_i}}{2EJ y_i} (z_{i+1} - z_i)^2 \\ \frac{S y_i}{J y_i} (z_{i+1} - z_i) \end{array} \right\}, \quad \mathbf{G}_i = -\mathbf{S}_i,$$

称 $\mathbf{D}^{(i)}$ 为轴向拉压问题第 i 个单元体的传递矩阵

由 (21)、(22) 式可得

$$\mathbf{D} \mathbf{T}_1^0 + \mathbf{G} = \bar{\mathbf{T}}_n \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(n)} \mathbf{D}^{(n-1)} \dots \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{D}^{(1)}$$

称为杆轴向拉压问题的传递矩阵。

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}^{(n)} \mathbf{D}^{(n-1)} \dots \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{G}_1 Q_{x_1}^0 + \mathbf{D}^{(n)} \mathbf{D}^{(n-1)} \dots \mathbf{D}^{(3)} \mathbf{G}_2 Q_{x_2}^0$$

$$+ \dots + \mathbf{D}^{(n)} \mathbf{G}_{n-1} Q_{x_{n-1}}^0 + \mathbf{G}_n Q_{x_n}^0 + P_i \mathbf{D}^{(n)} \mathbf{D}^{(n-1)} \dots \mathbf{D}^{(i+1)} \mathbf{S}_i$$

类似前述, 杆轴向拉压问题可以求解。

二、计算结果

由上述可知, 用有限分析法分析变截面开口薄壁杆件在静载作用下的弯曲、扭转问题, 最后归结为求解二阶线性代数方程组。本文以薄壁桥为背景, 对各种支承、各种断面形状的杆进行了电算。限于篇幅, 现仅把两端固支的 Π 型截面杆的计算结果列于附表。由于各种问题的界面参数在七位有效数字内关于对称断面完全对称, 表中只列出有代表性的三个界面的值。杆的形状、尺寸如图 2 所示。其中, 1、2 和 3 界面的 z 坐标为 0、4 和 6m。曲线 l 的方程为

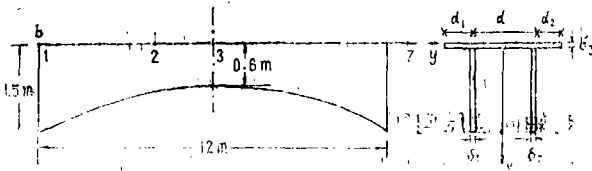


图 2

$$x(z) = a + \frac{4(h-a)(z-l/2)^2}{L^2} \quad (24)$$

$$a = 0.6\text{m}, \quad h = 1.5\text{m}, \quad L = 12\text{m}, \quad d_1 = d_2 = 1\text{m}, \quad d = 2\text{m},$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.16\text{m}.$$

杨氏模量 $E = 1.75 \times 10^8 \text{ T/m}^2$, 剪切模量 $G = E/4.5$, 集中载荷 $P = (10, 0, 0) \text{ T}$, 其作用点的坐标为 $(0, 1, 6) \text{ m}$, 重度为 $\gamma = 2.5 \text{ T/m}^3$.

表1 扭转问题的界面参数

界面号 划分单元数	1				2				3			
	θ	θ'	B	M	$\theta_{\times 10^{-4}}$	$\theta'_{\times 10^{-4}}$	B	M	$\theta_{\times 10^{-4}}$	$\theta'_{\times 10^{-4}}$	B	M
3	0	0	14.56	-5	-7.420	-2.432	-2.998	-5				
6	0	0	14.61	-5	-7.936	-2.635	-2.873	-5	-11.12	0	-11.98	-5
12	0	0	14.49	-5	-8.462	-2.744	-2.850	-5	-11.84	0	-11.90	-5
24	0	0	14.40	-5	-8.699	-2.782	-2.875	-5	-12.13	0	-11.91	-5
60	0	0	14.36	-5	-8.789	-2.795	-2.890	-5	-12.24	0	-11.92	-5
120	0	0	14.35	-5	-8.803	-2.798	-2.891	-5	-12.26	0	-11.92	-5

表2 X方向弯曲

界面号 划分单元数	1				2				3			
	ξ	ξ'	M_y	Q_x	$\xi_{\times 10^{-4}}$	$\xi'_{\times 10^{-4}}$	M_y	Q_x	$\xi_{\times 10^{-4}}$	$\xi'_{\times 10^{-4}}$	M_y	Q_x
3	0	0	-55.04	19.24	9.900	3.432	2.077	9.320				
6	0	0	-54.50	19.00	8.515	3.550	1.343	9.240	12.95	0	15.58	5
12	0	0	-54.66	18.94	8.276	3.633	0.8574	9.220	13.04	0	15.06	5
24	0	0	-54.70	18.93	8.215	3.655	0.7413	9.215	13.04	0	14.93	5
60	0	0	-54.71	18.92	8.197	3.661	0.7091	9.214	13.04	0	14.90	5
120	0	0	-54.71	18.92	8.195	3.662	0.7046	9.213	13.04	0	14.89	5

表3 Y方向弯曲

界面号 划分单元数	1				2				3			
	η	η'	M_x	Q_y	$\eta_{\times 10^{-4}}$	$\eta'_{\times 10^{-4}}$	M_x	Q_y	$\eta_{\times 10^{-4}}$	$\eta'_{\times 10^{-4}}$	M_x	Q_y
3	0	0	-33.64	12.61	1.768	0.5648	7.679	9.020				
6	0	0	-33.65	13.36	1.641	0.5380	6.617	9.088	2.287	0	26.05	10.67
12	0	0	-32.72	14.01	1.561	0.5181	6.094	8.718	2.190	0	24.78	10.32
24	0	0	-32.35	14.49	1.538	0.5126	5.953	8.623	2.163	0	24.46	10.24
60	0	0	-32.19	14.73	1.532	0.5109	5.911	8.595	2.154	0	24.37	10.22
120	0	0	-32.17	14.77	1.531	0.5107	5.905	8.591	2.153	0	24.35	10.21

为了起见,现将120单元划分格式的部分计算结果示于图3.其中 L_1, L_2, L_3, L_4 分别是扭转问题的双力矩、 x 方向弯曲的弯矩和挠度以及 y 方向弯曲的弯矩曲线.

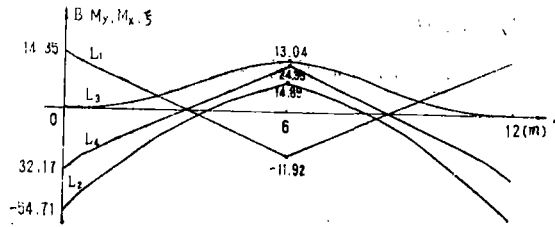


图 3

我们令上述算例中的

$$h = a = 1 \text{ m},$$

由(24)式得 $x(z) = 1$ (m), 这表明变截面杆退化为等截面杆, 计算结果与等截面薄壁杆件的分析解完全相同. 以约束扭转问题的双力矩为例, 分析解函数为^[5]

$$B(z) = -\frac{M}{2\alpha} \frac{\text{ch}\alpha z - \text{ch}\alpha(\frac{l}{2} - z)}{\text{sh} \frac{\alpha L}{2}} \quad (0 \leq z < \frac{l}{2})$$

其几何曲线在任意给定点的标高, 与本文介绍的方法的对应值完全一样(见图4).

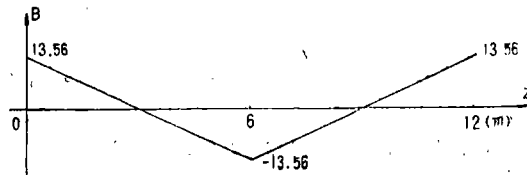


图 4

计算结果表明①约束扭转时所产生的正应力与剪应力属同一数量级, 与自由扭转不同, 不能忽略. 同时还要考虑弯曲、轴向拉压的应力. ②随着杆单元体的逐步细分, 计算结果稳定地朝着一个方向收敛.

三、误差分析

1. 根据几何特征量 $F, S_y, S_x, J_{wbx}, J_{wb}, J_d$ 的定义, 它们是 x 的函数, 实际上是 z 的复合函数. 将方程组(1)展开, 包含 $F'(z), S_y'(z), S_y''(z), \dots, J_{wb}', J_{wb}''$ 项, 用阶梯折线代替光滑曲线后, 化为方程组(5), 实质上忽略包含 $x', (x')^2, x''$ 的项, 其引起的误差值计如下:

当 $x = \text{常数}$ 时, $x' = 0$ 为等截面方程, 没有产生计算误差. 设 $x_i = x_i(z)$ 是光滑曲线, 不妨设为抛物线, 用(24)表示, 则

$$x' = \frac{8h}{L^2} (z - \frac{L}{2}), \quad x'' = \frac{8h}{L^2}$$

对于微拱结构 $(h-a)/L \ll 1$, x' 、 x'' 可以忽略不计, 当 $(h-a)/L < \frac{1}{10} \sim \frac{1}{15}$ 时, 忽略 x' 、 x'' 所引起的平均误差小于 5%。这是一般工程所允许的。当 $(h-a)/L \approx \frac{1}{8}$ 时, 要考虑 x' 、 x'' 的影响, 此时对方程 (5) 的分析加以适当修改后, 仍然可以使用。

2. 用阶梯形折线代替光滑曲线。为便于叙述, 考虑杆被等分为 n 个单元体, 第 i 个单元体两端面的 z 坐标分别为 z_i 、 z_{i+1} , 记

$$z_i^* = \frac{z_i + z_{i+1}}{2} = \frac{2i-1}{2n} L \quad \text{其中 } z_{i+1} - z_i = \frac{L}{n}$$

$$x_i^* = x(z_i^*) = a + \frac{(h-a)}{n^2} (2i-1-n)^2 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

由曲线 $z = z_i$, $z = z_{i+1}$, $x = 0$, $x = x(z)$

所围的图形的面积为

$$S = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \int_0^{x(z)} dx dz = a \frac{L}{n} + \frac{h-a}{n^3} (4i^2 - 4in + n^2 - 4i + 2n - \frac{4}{3}) L.$$

另一方面, 由积分中值定理,

$$S = \frac{L}{n} x(\xi), \quad \xi \in (z_i, z_{i+1})$$

记 $\bar{x}_i = x(\xi)$, 即 $S = \frac{L}{n} \bar{x}_i$. 用 x_i^* 代替 $x(z)$, $z \in (z_i, z_{i+1})$, 而 $x(z)$ 用 \bar{x}_i 替换, 由此引起的绝对误差为

$$|x_i^* - \bar{x}_i| = \frac{h-a}{3n^2},$$

可见, 只要 n 充分大, 本文叙述的方法之误差可以足够小。

参 考 文 献

- (1) Chen. C. J & P. L., The Finite Analytic Method For Steady and Unsteady Heat Transter Problems, *ASME*, 1980, 4.
- (2) Chen. C. J., Naseri-Nashet, H., and Li, P., The Finite Analytic Method, Technical Report E-CJ-1-80, Energy Division, The University of Iowa, Iowa City, Jon, 1980.
- (3) Torsion des dünnwandigen Stabes mit veränderliche einfach Symmetrischen offenem Querschnitt Dr, Ing Zbigniew Cywinski, *Damz Die Baute Chnik*, 41 (1964), 301-307.
- (4) 马汝念、陈宝耀、刘宏开, 变系数四阶微分方程组的有限元素法, *中山大学学报 (自然科学版)*, 1980, 4.
- (5) 陈铁云、陈伯真编, 开口薄壁杆件的弯曲、扭转与稳定性, 国防工业出版社, 1965年.

The Finite Analytic Method of the Open Thin-walled Bars with Variable Section

Guo Jinji Huang Chengbiao

Abstract

Presents the finite analytic method of the open Thin-walled bars with variable section. Using the boundary condition of the bar and the connected condition between element bodies, we set up the transport matrix of the original parameter, and provide the finite-analytic numerical solution. Error analysis and calculating examples are given.