关于相对化的计算复杂性类的研究（摘要）

王 洁　侯广坤
（中山大学计算机科学系）
李 祥
（贵州大学数学系）

设P^A及NP^A分别表示被多项式时间有界的确定性与非确定性的带oracle$A$的图灵机所接受的语言类；E^A及NE^A分别表示被指数时间有界的确定性与非确定性的带oracle$A$的图灵机所接受的语言类．不失一般性，设图灵机的带上字母表为{0,1}．本文所讨论的语言（集合）及字分别指{0,1}*的子集及元素．本文的证明使用了有穷损害优先方法．

§1．定义

1．任给A、B,若$P^A\subsetneq P^B$（即$A\lneq^p_t B$），则记为$A\prec B$；若$A\prec B$或$B\prec A$，则称A、B可比较，否则称为不可比较，并记为$A|B$。

2．称A为**密度可测**,如果存在一个可计算函数d,使得(1)对任意多项式p，都可能行地找到无穷个n使$p(n)<d(n)$；(2)$\forall n\in\omega$（$\omega=\{0,1,2,\cdots\}$）：$d(n)\leqslant 2^n$；(3)$\forall n\in\omega$:$\|A\cap\{\alpha:\alpha$ 的长度为$n\}\|=d(n)$。（这里$\|\cdot\|$表示集合的基数）。

3．称语言A、B具有**相同的构型**，如果$\forall n$:$\|A\cap\{\alpha:\alpha$ 的长为$n\}\|=\|B\cap\{\alpha:\alpha$的长为$n\}\|$，记为$A\backsim B$。

4．一个NP集合称为**NP-低单纯的**，如果它的补集包含无穷的NP集但不包含无穷的P集。

§2．主要定理

1．对任意B都有A使$P^A=NP^B$当且仅当NP^B关于补运算封闭。

推论1　存在递归语言A使$P^A=NP$当且仅当$NP=co-NP$。

从而就把$NP=?\ co-NP$这个有名的尚未解决的问题与相对化联系了起来。

2．$(\forall A\in NP)[NP^A=NP\Longleftrightarrow NP=co-NP]$。

下面的定理3、4、5、6、7是我们得到的关于多项式度的若干主要结果：

3．对任意A，存在B使$A\prec B$。若A递归，则B亦递归。

4．任给无穷语言A，可找到递归语言B使$B\subsetneq A$且$P^B\nsubseteq P^A$。

5．对任意$A\neq\phi$，都可找到B、C使$C\in NP^A$，$C\neq\phi$，$C\subsetneq B$且$P^C\subseteq P^B$。若A是递归的，则B、C亦递归。（ϕ表示空集）。

本文1985年2月收到

6．存在递归语言A及B使$A \not\leq B$，而$A \prec B$。

7．设语言A密度可测，则A存在两个非空的不相交的子集B和C使$B | C$且$B \backsim C$。

1983年，Homer和Maass在$P \neq NP$的假设下定义了NP-单纯集，讨论了NP集格的性质。我们则定义了NP-低单纯集（定义4）。

8．存在oracle$A$使NP^A-低单纯集存在。

1982年，Book等人证明存在oracle$A$使$P^A \neq NP^A$但$E^A = NE^A$，从而NE^A关于补运算封闭。我们则证明了

9．存在oracle$B$使NE^B关于补运算不封闭。

10．存在A使$P^A \neq NP^A, E^A \neq NE^A$且$(\forall k \in \omega)[NP^A \not\subseteq T^A(2^{n^k})]$。（有关$T^A(\lambda n[f(n)])$的意义可见[3]）。

11．对任意B,存在A使得有无穷语言$C \in NP^A$满足$(\forall C' \subseteq C)[C'$无穷$\Rightarrow C' \notin E^B]$。

12．对任意B,存在A使得有无穷语言$C \in NP^A$满足$(\forall C' \subseteq C)[C'$无穷$\Rightarrow C' \notin NE^B]$。

注　1.本文完成于1984年6月。脱稿后曾得到国内外许多著名专家的注意。

2.本文定理1及推论1的证明将在《科学通报》1985年第7期发表。

主 要 参 考 文 献

[1] T. Baker, J. Gill, R. Solovay, *SIAM J. Comput.*, 4(1975) 431—442.

[2] S. Homer, W. Maass, *Theoret. Comput. Sci.*, 3 (1983), 279—290

[3] S. Moran, *SIAM J. Comput.*, 2 (1982), 344—349.

[4] R. V. Book, C.B. Wilson, M. R. Xu, *SIAM J. Comput.*, 3 (1982), 511—581.

On Relativized Complexity Classes

Wang Jie　　Hou Guangkun　　Li Xiang

Abstract

We give a necessary and sufficient condition for an NP^B to be equal to a P^A. From this we show that there is an oracle A such that $P^A = NP$, if and only if $NP = co-NP$. We then define an order relation on 2^ω which describes the properly including relation among the relativized P classes, and we study the structure of the family of the relativized P classes under this order relation. For example, we show that there is a sequence of comparable recursive languages, and a density measurable set A has two disjoint nonempty subsets B and C such that B and C are incomparable and of the same form. Under the assumption $P \neq NP$, Homer and Maass[2] defined an PN-simple set and proved that there is an oracle relative to which an NP-simple set exists. We then define an NP-lowersimple set and proved that there is an oracle relative to which an NP-lowersimple set exists. The construction of the oracle is finite injury priority arguments. By the construction of B in Theorem 4.1 in [2], we show that no NP^B-lowersimple sets exist. Finally, we discuss some properties between the relativized polynomial—time classes and the relativized exponential—time classes.