

# 纯格点规范场相变的变分分析

郭硕鸿 刘金明 陈启洲  
(物理学系)

## 摘 要

应用混合方格变量—链变量作用量作为改进平均场理论的试探作用量,用变分法计算了  $U(2)$ ,  $U(3)$ ,  $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 纯规范场的元方格能量 $E_p$ 得到这些规范场的  $E_p \sim \beta$ 曲线。解释了  $SU(2)$  和  $SU(3)$  规范场为什么没有相变。这些结果比单纯平均场的计算更接近于 Monte Carlo 计算的结果。

近年来,在格点规范理论中,应用平均场理论讨论纯规范场的相变问题,受到人们的重视<sup>[1,2]</sup>,但单纯平均场理论过于粗略。应用于某些规范群,例如 $SU(2)$ 规范场时,平均场理论给出有相变的结论,而Monte Carlo计算只观察到比热峰。为了改进平均场理论,已提出多种改进方法<sup>[3,4]</sup>。本文应用(4)中的方法,即应用混合方格变量—链变量工作量为试探作用量作变分计算,结果应用于 $SU(2)$ 规范场时,没有发现相变。对 $U(2)$ ,  $U(3)$ 和 $SU(3)$ 规范场也作出了 $E_p \sim \beta$ 曲线。本文计算结果比单纯平均场的计算更接近于Monte Carlo 计算的结果。

## 一、混合方格变量—链变量试探作用量

在格点规范理论中,纯规范场的作用量 $S$ 为

$$S = -\frac{\beta}{\text{tr}1} \sum_P \text{Re tr} U_P \quad (1)$$

相应的配分函数 $Z$ 和自由能 $W$ 分别为

$$Z = \int DU e^S, \quad DU = \prod_l dU_l \quad (2)$$

$$W = -\ln Z \quad (3)$$

式中,  $U_l$ 为链 $l$ 上规范群的一个元素,  $\text{tr}1$ 等于这个群表示的维数。  $\beta = 1/g^2$ ,  $g$ 为耦合常数。  $P$ 代表元方格,  $U_P$ 为组成元方格 $P$ 的4个链上的 $U$ 的乘积。

如果用试探作用量 $S_t$ 代替作用量 $S$ ,引进相应的试探配分函数 $Z_t$ 和试探自由能 $W_t$ 。

本文于1984年3月收到

• 本工作是中国科学院科学基金会以及中山大学高等学术研究中心资助的课题。

它们分别为

$$Z_0 = \int DU e^{S_0} \quad (4)$$

$$W_0 = -\ln Z_0 \quad (5)$$

利用不等式

$$\langle e^x \rangle_0 \geq e^{\langle x \rangle_0} \quad (6)$$

得

$$W \leq W_0 + \langle S_0 - S \rangle_0 \quad (7)$$

式中  $\langle \quad \rangle_0$  是生试探作用量  $S_0$  中的平均值。

由以上不等式可见, 选  $S_0$  应使式(7)右边为最小。平均场理论取试探作用量  $S_0$  为

$$S_0 = \frac{z}{\text{tr}1} \sum_l \text{Re tr} U_l \quad (8)$$

式中  $z$  为变分参数, 由(7)式右边为最小确定。为方便起见, 我们称  $U_l$  为链变量, 称  $U_p$  为方格变量。平均场作用量实际上是将(1)中对元方格变量  $U_p$  求迹转为对元链变量  $U_l$  求迹, 忽略了各个链变量之间的耦合。为了改进平均场理论, 我们观察到若在  $S_0$  中将第一个链变量  $U_1$  改回包含  $l=1$  的元方格变量  $U'_1 = U_1 U_2 U_3^+ U_4^+$ , 而得新的试探作用量  $S_1$  为

$$S_1 = \frac{z}{\text{tr}1} \text{Re tr} (U'_1 + \sum_{l=1} U_l) \quad (9)$$

相应的试探配分函数  $Z_1$  为

$$Z_1 = \int DU e^{S_1} \quad (10)$$

则满足  $Z_1 = Z_0$ ,  $\langle S_1 \rangle_1 = \langle S_0 \rangle_0$  (11)

但  $\langle S \rangle_1 \neq \langle S \rangle_0$  (12)

如果  $\langle S \rangle_1 > \langle S \rangle_0$ , 则由(7)式可见  $S_1$  比  $S_0$  给出更接近准确的自由能的结果。这是可能的, 直接计算得

$$\langle S \rangle_1 - \langle S \rangle_0 = m_0 + 5m_0^7 - 6m_0^4 \quad (13)$$

式中

$$m_0 = \left\langle \frac{1}{\text{tr}1} \text{Re tr} U_l \right\rangle_0 \quad (14)$$

为平均场理论中链变量  $U_l$  的平均值。从(13)式可见, 只要  $m_0^3 < \frac{1}{5}$ , 就有  $\langle S \rangle_1 > \langle S \rangle_0$ 。按这个方向, 我们还可以将更多的链变量改回方格变量, 以得到更好的近似值。

在计算某一物理量的平均值时, 还有一种选择试探作用量的可能性。设  $S_i$  和  $S_j$  为两个试探作用量, 满足

$$Z_j = Z_i \quad (15)$$

$$\langle S_j \rangle_j = \langle S_i \rangle_i, \quad \langle S \rangle_j = \langle S \rangle_i \quad (16)$$

设我们求某一正定物理量  $X > 0$  在作用量为  $S$  的系统中的平均值  $\langle X \rangle$  为

$$\langle X \rangle = Z^{-1} \int DU e^{\beta X} \quad (17)$$

用试探作用量  $S_i$  或  $S_j$ , 有以下不等式:

$$\ln \langle Z \langle X \rangle \rangle \geq \ln Z_j + \langle S - S_j + \ln X \rangle_j \quad (18)$$

$$\ln \langle Z \langle X \rangle \rangle \geq \ln Z_i + \langle S - S_i + \ln X \rangle_i \quad (19)$$

由(15)和(16)式可见, 当  $\langle \ln X \rangle_j > \langle \ln X \rangle_i$  时, 试探作用量  $S_j$  给出比  $S_i$  更好的  $Z \langle X \rangle$  的上限。

引进平均元方格变量平均值  $E_p$  为

$$E_p = \left\langle \frac{1}{\text{tr}1} \text{Re tr} U_p \right\rangle \quad (20)$$

及在  $S_j$  中的元链变量平均值  $m$  为

$$m = \left\langle \frac{1}{\text{tr}1} \text{Re tr} U_i \right\rangle_j \quad (21)$$

并取正定物理量  $X$  为

$$X = e^{\frac{\lambda}{\text{tr}1} \text{Re tr} U_p}, \quad 0 < \lambda \ll 1. \quad (22)$$

代进(18)式, 当  $\lambda$  很小时, 得

$$\ln Z + \lambda E_p \geq \ln Z_j + \langle S - S_j \rangle_j + \lambda m \quad (23)$$

由于有不等式(7), 上式一般不能给出对  $E_p$  的确定上限。但若假定试探作用量  $S_j$  已较好地逼近  $S$ , 使  $\ln Z \approx \langle S - S_j \rangle_j$ , 则若  $\langle \text{Re tr} U_p \rangle_j > \langle \text{Re tr} U_p \rangle_i$ ,  $S_j$  就可能比  $S_i$  给出较好的  $E_p$  的上限。

取  $S_j$  是混合方格-链试探作用量, 当  $S_j$  的方格变量含有给定的方格  $U_p$  时, 它就给出较大的  $\langle \frac{1}{\text{tr}1} \text{Re tr} U_p \rangle = m$ 。于是有

$$E_p = m \quad (24)$$

为了在给定  $\beta$  下尽可能提高  $m$  值, 应该尽可能地提高在  $S_j$  中方格变量数目对链变量数目的比值。我们还注意到当  $\beta$  不大时,  $E_p$  主要来自方格  $P$  附近区域的场变量的贡献。在局部区域可以得到较大的方格变量对链变量的比值, 我们在局部区域选一组链  $U_i$ , 其他链为  $U_e$ , 选试探作用量使  $U_i$  和  $U_e$  没有耦合, 即

$$S_j = S_e(U_e) + S_i(U_i) \quad (25)$$

$$S_e = \frac{\beta}{\text{tr}1} \sum'_P \text{Re tr} U_P \quad (26)$$

$$S_i = \frac{z}{\text{tr}1} \sum_{\{s_i\}} \text{Re tr} U_i \quad (27)$$

式中  $\sum'_P$  表示对所有不含  $U_i$  的方格求和,  $z$  为变分参数。于是

$$Z_j = \int \prod dU_e e^{\frac{\beta}{\text{tr}1} \sum'_P \text{Re tr} U_P} \int \prod dU_i e^{S_i(U_i)} \equiv Z_e Z_i \quad (28)$$

代进(7)式得

$$-\ln \frac{Z}{Z_0} \leq -\ln Z_i - \langle S_j - S \rangle_j \tag{29}$$

由  $S_j$  的性质,  $\langle S_j - S \rangle_j$  只依赖于链变量  $U_i$ , 因此, 我们只要在  $S_j$  中把尽可能多的链变量改回方格变量, 就能得到最小的  $\langle S_j - S \rangle_j$  值。在我们考虑过的局部组态中, 能够得到最大的方格变量对链变量比值的组态是双层超立体, 这超立体的一个单元如图 1 所示。

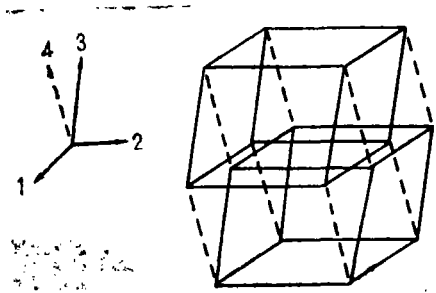


图 1

在 4 维超立体中记空间的三个取向为 1, 2, 3, 时间为取向 4, 则有 6 种面, 称取向为 12, 23, 31 的面为底面, 取向为 14, 24, 34 的面为侧面。则每个立方体有 12 个侧面, 6 个上底面, 6 个下底面。

在每一个双层超立体单元中, 有 12 个侧面, 我们全部取为方格变量, 但 6 个中间面中, 只有 5 个面可作为方格变量, 另一个中间面的边界的 4 条链都已经作为其它面的方格变量的组成部分了。我们称之为一个空位。还有 6 个上底面和 6 个下底面, 全部都是空位, 其中有两个为双空位, (需用 9 个面把它围住)。如图 1 所示。按上述取法得混合方格变量—链变量的试探作用量后, 可得

$$\langle S \rangle_i = \beta(17m + 11m^5 + 2m^9) \tag{30}$$

$$\langle S_i \rangle_i = z(17m) \tag{31}$$

选  $S_i$  使  $\langle S_i - S \rangle_i$  最大, 得

$$z = \beta \left( 1 + \frac{55}{17} m^4 + \frac{18}{17} m^8 \right) \tag{32}$$

式中

$$m = Z_1^{-1} \int dU_l e^{\frac{z}{\text{tr}1} \text{Re}tr U_l} \frac{1}{\text{tr}1} \text{Re}tr U_l \tag{33}$$

$$Z_1 = \int dU_l e^{\frac{z}{\text{tr}1} \text{Re}tr U_l} \tag{34}$$

$m_i$  为单链变量平均值,  $Z_1$  为单链试探配分函数,  $z$  为变分参数。将(32)(33)和(24)联立, 便可求得  $E_p \sim \beta$  曲线。

## 二、应 用

从以上的分析可见采用混合方格变量链变量作用量作变分计算, 只要计算单链变量平均值就可求得  $E_p \sim \beta$  曲线。下面对常见的几种李群作计算。

### ① $U(2)$ 群

$$Z_1 = \left| \begin{array}{cc} I_0(x) & I_1(x) \\ I_1(x) & I_0(x) \end{array} \right|, \quad x = \frac{z}{2} \tag{35}$$

直接计算可得

$$m = Z_1^{-1} \frac{dZ_1}{dz} = \frac{x^{-1} I_1^2(x)}{I_0^2(x) - I_1^2(x)} \tag{36}$$

式中  $I_n(x)$  为  $n$  阶虚宗量贝塞尔函数。

计算结果与 Monte Carlo 计算<sup>(5)</sup> 的比较见图 2。

② U(3)群

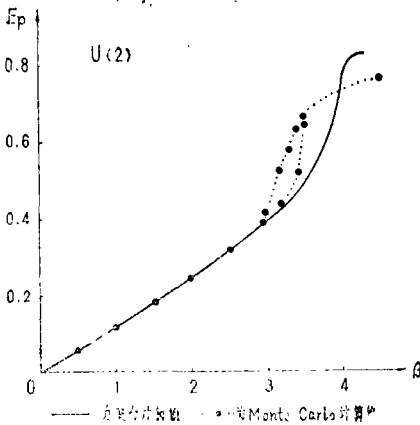


图 2

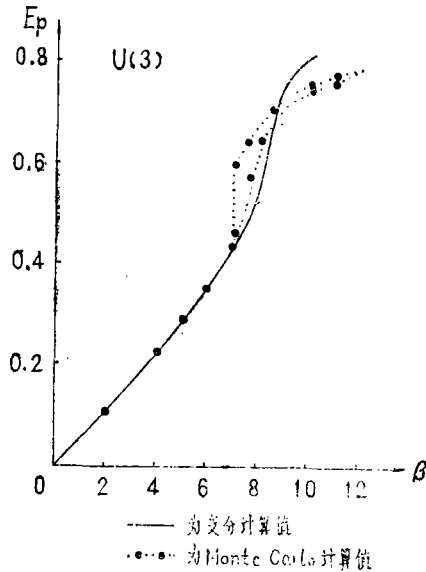


图 3

$$Z_1 = \begin{vmatrix} I_0 & I_1 & I_2 \\ I_1 & I_0 & I_1 \\ I_2 & I_1 & I_0 \end{vmatrix} \tag{37}$$

$$m = \frac{I_2(x)}{3I_1(x)} + \frac{1}{3x} \cdot \frac{I_1^2(x) - I_0(x)I_1(x)}{I_0^2(x) - I_1^2(x) - x^{-1}I_0(x)I_1(x)} \tag{38}$$

$$x = \frac{z}{3} \tag{39}$$

式中  $I_n$  是虚宗量贝塞尔函数  $I_n(x)$  的简写。

计算结果与 Monte Carlo 计算<sup>(6)</sup> 的比较见图 3。

③ SU(2)群

$$Z_1 = \frac{2I_1(z)}{z} \tag{40}$$

$$m = \frac{I_2(z)}{I_1(z)} \tag{41}$$

计算结果与 Monte Carlo 计算<sup>(6)</sup> 的比较见图 4。

④ SU(3)群<sup>(7)</sup>

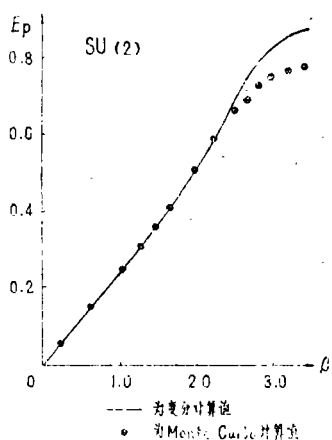


图 4

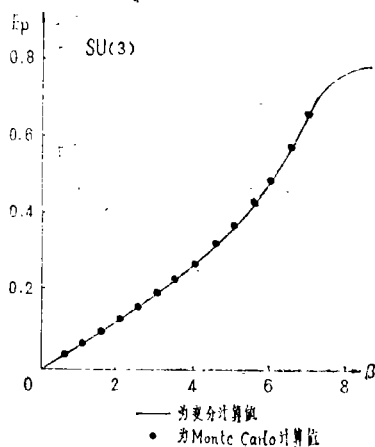


图 5

$$Z_1 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k+1)!(k+2)!} \sum_{n=0}^k \frac{(2x)^n}{n!} \binom{3k+3}{2k+n+3}$$

$$\approx \sum_{k=0}^{25} C_k x^k, \quad x = \frac{z}{6} \tag{42}$$

式中,  $Z_1$  作为  $x$  的幂级数, 收敛较慢, 考虑到  $x$  不大 ( $x < 3$ ), 展到  $x$  的 25 次项, 误差已经比较小, 因此 (42) 式可作为  $Z_1$  的近似值, 其中系数  $c_n$  如下:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{1}{3},$$

$$c_4 = \frac{1}{2}, \quad c_5 = \frac{1}{4}, \quad c_6 = \frac{13}{72}, \quad c_7 = \frac{11}{120},$$

$$c_8 = \frac{139}{2880}, \quad c_9 = \frac{19}{864}, \quad c_{10} = \frac{23}{2400}, \quad c_{11} = \frac{29}{7560},$$

$$c_{12} = 1.449 \times 10^{-3}, \quad c_{13} = 5.130 \times 10^{-4},$$

$$c_{14} = 1.717 \times 10^{-4}, \quad c_{15} = 5.440 \times 10^{-5},$$

$$c_{16} = 1.637 \times 10^{-5}, \quad c_{17} = 4.690 \times 10^{-6},$$

$$c_{18} = 1.282 \times 10^{-6}, \quad c_{19} = 3.352 \times 10^{-7},$$

$$c_{20} = 1.282 \times 10^{-6}, \quad c_{21} = 3.352 \times 10^{-7},$$

$$c_{22} = 8.396 \times 10^{-8}, \quad c_{23} = 2.019 \times 10^{-8},$$

$$c_{24} = 4.667 \times 10^{-9}, \quad c_{25} = 1.039 \times 10^{-9},$$

$$c_{26} = 2.229 \times 10^{-10}, \quad c_{27} = 4.000 \times 10^{-11}.$$

由 (42) 式可得:

$$m = \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial z} = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \ln Z_1 \tag{43}$$

由此得到  $E_p \sim \beta$  曲线与 Monte Carlo 计标<sup>(6)</sup> 的比较见图 5。

### 三、 讨 论

从图2到图5的比较可见,混合方格-链变量变分的计算与 Monte Carlo 计算的  $E_p \sim \beta$  曲线符合得相当好。在我们研究过各种群( $Z_2, Z_3, Z_4, Z_6, U(1), SU(2), U(3), SU(3)$ 等)中只有 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 群在过渡区的行为比较平滑,其他群或者显示明显的相变,例如 $Z_2$ 和 $Z_3$ 群或者在过渡区有急剧的变化。〔例如本文中的 $U(2)$ 和 $U(3)$ 群纯格点规范场〕因此,我们的结果在一定程度上解释了为什么 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 群可能没有相变。

### 参 考 文 献

- [1] J. Greensite and B. Lautrup, *phys. Lett.*, 104B (1981), 41.
- [2] P. Cvitanovic, J. Greensite and B. Lautrup, *Phys. Lett.*, 105 B(1981), 197.
- [3] Chung-I Tan and Xi-te Zheng, preprint Brown-HET-502(1983).
- [4] 郭硕鸿等, 全国格点规范理论专题会议资料(广州, 1983), 28.
- [5] M. Creutz and K. J. M. Moriarty, *Phys. Rev.*, D25(1982), 610.
- [6] M. Creutz, *Phys. Rev.*, D21(1980), 2308.
- [7] C. B. Lang et al., *Phys. Lett.*, 100 B (1981), 29.
- [8] R. C. Edgar et al., *J. Phys.*, G7(1981), L85.

## Variational Analysis of Phase Transition in Pure Lattice Gauge Theories

Guo Shuohong   Liu Jinming   Chen Qizhou

### Abstract

A modified mean field theory applying an improved variational action with mixed plaquette-link variables is used to study the phase transition of 4-dimensional pure lattice gauge systems. The theory gave the overall behavior of mean plaquette energies  $E_p$  for  $U(2)$ ,  $U(3)$ ,  $SU(3)$  and  $SU(2)$  groups over a wide range of  $\beta$ , including the phase transition or crossover region, and explained that the phase transitions in  $SU(2)$  and  $SU(3)$  pure lattice gauge systems are absent. The  $E_p \sim \beta$  curves agree with Monte Carlo results and are better than that given by simple mean field theory.