一类非线性动力系统对高斯白噪声激励响应的稳态概率密度函数

符 明 南

（力学系）

摘 要

本文从 Fokker—Planck 方程出发，证明了存在一类阻尼和刚度同时非线性的动力系统对于高斯白噪声激励时的响应具有位移和速度分离乘积形式的稳态概率密度函数。

T.K.Caughey[1]已获得线性阻尼系统对于高斯白噪声激励时稳态响应的位移和速度分离乘积形式的概率密度函数。然而，对于阻尼和刚度同时非线性的动力系统尚未得到相应的结果。因此，本文结果既在一个自由度范围内解决了〔1〕中提出的第一个待解决问题，又纠正了〔3〕、〔4〕及〔5〕在这个问题上的不正确结论。

§1 系统模型

研究如下一类非线性动力系统

$$\ddot{X}(t)+g(\dot{X}(t))+k(X(t))=W(t) \tag{1}$$

式中，

$W(t)$是高斯白噪声过程，$E[W(t+\Delta t)\cdot W(t)]=2D\delta(\Delta t)$，$D$是常数。

$k(X)$是刚度项，对于任意正数α有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\int_0^x \alpha k(u)du\right]dx<+\infty \tag{2}$$

$g(\dot{X})$是待定的非线性阻尼项。

$X(t)$是系统的响应过程。

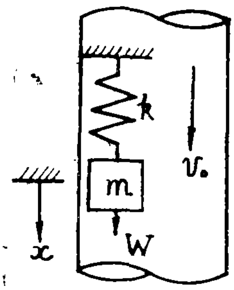

图 1

本文研究的系统如以在风洞中一模型为代表（见图1），质量是m，通过弹簧$k(x)$与洞壁相连。风洞中的风速v_0假设是足够大，使得v_0始终大于m的振动速度。$g(\dot{X})$代表m与运动介质之间的总阻尼效应。

本文1983年12月收到

§2 非线性阻尼项和稳态概率密度函数

引入状态变量

$$Y(t)=\begin{pmatrix}Y_1(t)\\ Y_2(t)\end{pmatrix}$$

其中，$Y_1(t)=X(t)$，$Y_2(t)=\dot{X}(t)$。并用$p_s(y_1,y_2)$表示$Y(t)$的稳态概率密度函数，则它满足方程(1)的稳态时的Fokker—Planck方程[2]

$$D\frac{\partial^2 p_s}{\partial y_2^2}-\frac{\partial}{\partial y_1}(y_2 p_s)+\frac{\partial}{\partial y_2}[(k(y_1)+g(y_2))p_s]=0 \tag{3}$$

假设方程(3)具有位移和速度分离乘积形式的解及根据基本假设，则有

$$p_s(y_1,y_2)=\begin{cases}p_{s1}(y_1)\cdot p_{s2}(y_2) & y_2\leqslant v_0\\ 0 & y_2>v_0\end{cases} \tag{4}$$

或表达为

$$p_s(y_1,y_2)=\begin{cases}\exp[q_1(y_1)+q_2(y_2)] & y_2\leqslant v_0\\ 0 & y_2>v_0\end{cases} \tag{5}$$

其中，$q_1(y_1)$、$q_2(y_2)$分别是$p_{s1}(y_1)$及$p_{s2}(y_2)$的自然对数。

把(5)代入(3)得

$$y_2\frac{dq_1(y_1)}{dy_1}-k(y_1)\frac{dq_2(y_2)}{dy_2}=D\frac{d^2q_2(y_2)}{dy_2^2}+D\left(\frac{dq_2(y_2)}{dy_2}\right)^2$$

$$+g(y_2)\frac{dq_2(y_2)}{dy_2}+\frac{dg(y_2)}{dy_2}\qquad y_2\leqslant v_0 \tag{6}$$

注意到(6)式右端仅是y_2的函数，而左端却是两个变量y_1与y_2的函数，则应有

$$y_2\frac{dq_1(y_1)}{dy_1}-k(y_1)\frac{dq_2(y_2)}{dy_2}=0\qquad y_2\leqslant v_0 \tag{7}$$

$$D\frac{d^2q_2(y_2)}{dy_2^2}+D\left(\frac{dq_2(y_2)}{dy_2}\right)^2+g(y_2)\frac{dq_2(y_2)}{dy_2}+\frac{dg(y_2)}{dy_2}=0,\ y_2\leqslant v_0 \tag{8}$$

解(7)得

$$q_1(y_1)=-\int_0^{y_1}ck(u)du+c_1 \tag{9}$$

及
$$q_2(y_2)=-\frac{1}{2}cy_2^2+c_2 \tag{10}$$

此处，c为任意正数，c_1及c_2均是任意常数。

将(9)、(10)代入(5)得

$$p_s(y_1,y_2)=\begin{cases}A_1A_2\exp\left(-\int_0^{y_1}ck(u)\,du-\frac{1}{2}cy_2^2\right), & y_2\leqslant v_0\\ 0 & y_2>v_0\end{cases}\tag{11}$$

其中

$$A_1=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\int_0^{y_1}ck(u)du\right)dy_1\right)^{-1}\tag{12}$$

$$A_2=\left(\int_{-\infty}^{v_0}\exp\left(-\frac{1}{2}cy_2^2\right)dy_2\right)^{-1}\tag{13}$$

把(9)、(10)代入(8)得

$$\frac{dg(y_2)}{dy_2}=cy_2g(y_2)+DC-DC^2y_2^2\qquad y_2\leqslant v_0\tag{14}$$

方程(14)的通解为

$$g(y_2)=DCy_2+C_3\exp\left(\frac{1}{2}cy_2^2\right)\qquad y_2\leqslant v_0\tag{15}$$

其中，C_3是任意常数。现取

$$C_3=-DCv_0\exp\left(-\frac{1}{2}cv_0^2\right)\tag{16}$$

则(15)式化为

$$g(y_2)=\beta(y_2-v_0)-\beta v_0\exp\left\{\frac{\beta}{2D}[(y_2-v_0)^2+2v_0(y_2-v_0)]\right\}+\beta v_0\tag{17}$$

式中，$\beta=DC$是任意取定的正数，它与D及v_0完全给定了阻尼项。

综合上述论证可知，对于式(1)表示的刚度和阻尼同时非线性的动力系统，当其阻尼项由下式

$$g(\dot{X}(t))=\beta(\dot{X}(t)-v_0)-\beta v_0\exp\left\{\frac{\beta}{2D}[(\dot{X}(t)-v_0)^2+2v_0(\dot{X}(t)-v_0)]\right\}+\beta v_0$$

$$\dot{X}\leqslant v_0\tag{18}$$

给出时，则存在位移和速度分离乘积形式的概率密度函数．只要以x和$\dot{x}$分别代替式(11)中的y_1和y_2便得到它的表达式。

参 考 文 献

[1] Thoms. K. Caughey, Derivation and Application of the Fokker—Planck Equation to Discrete Nonlinear Dynamics Systems Subjected to White Random Excitation, 35 (1963), 1683—1692.

[2] Thoms. K. Caughey, *Advances in Applied Mechanics*, 11(1971), 209-255.

[3] Y.K.Lin, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, New York, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1967.

〔4〕 T.T. Song, *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, New York and London, 1973.

〔5〕 张炳根、赵玉芝，科学与工程中的随机微分方程，海洋出版社，1980年。

The Stationary Probabilitic Density Function of the Response of A Kind of Nonlinear Dynamic Subjected to Gaussian white Noise

Fu Mingnan

Abstract

The systems with nonliear both damping and stiffness are considered.

Starting from the Fokker-Planck equation the existence of the stationary probabilitic density function which may be of the form of the separation of the displacement and velocity for the systems subjected to Gaussian white noise is Shown.