区域稳定性理论

朱思铭
（数学系）

摘　要

本文提出常微分方程的区域稳定性理论，为解决其定义区域复杂的各类系统的稳定性问题建立了统一的理论根据和判别法则，文中的结果在生态系统、电力系统中有直接应用。

A.M.Ляпунов[1,2]于1892年创立的运动稳定性理论是针对局部小范围的情形而言的。对于初始扰动为任意大的情形，E.A.Барбашин和H.H.Красовский[3]于1952年通过提出无限大定正函数建立了全局稳定性理论.后来，H.H.Красовский[4]（1959）又将结果推广到开区域中，建立了大范围稳定性理论。

随着科学技术的不断发展，特别是在生态数学、电力系统等新领域，建立并提出了各类系统的区域稳定性问题。讨论这些系统稳定性，如果全区域是开的且较有规则时，则可以通过变换化为全空间，用全局稳定性理论或者大范围稳定性理论进行讨论。但是，对于区域中其边界是闭或部分是闭的情形，特别是形状复杂的区域，前述的稳定性理论是不能直接应用的。

本文建立了区域稳定性理论，它适用于任何复杂的区域，从而为解决其定义区域复杂的各类系统的稳定性问题提供了统一的理论根据和判别法则。文中的结果在生态系统和电力系统等方面有直接应用。

§1　区域稳定性定义和基本定理

考虑n维欧几里得空间中的一n维单连通区域D，这里D可能是有界的，也可能是无界的，或者是全空间，其边界可以是属于D（闭）的，不属于D（开）的或部分属于D，部分不属于D，或者不存在边界，或者部分边界不存在。

假设原点$O\in D$，而且如果$\bar{D}\backslash D\neq\phi$则要求$\rho_0>0$，这里

$$\rho_0=\rho(O,\bar{D}\backslash D)=\{\inf\|x\|:x\in\bar{D}\backslash D\},$$

$\bar{D}$表集合D的闭包，ϕ表空集，$\|x\|$表x的模。

考虑微分方程组

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1,1}$$

本文1984年7月收到。本项研究得到中山大学高等学术研究中心资助。

其中x、$f(t,x)$为n维向量，$f(t,x)$在域

$$G=\{(t,x): t\geqslant 0,\ x\in D\} \tag{1.2}$$

中连续且满足局部Lipschitz条件。同时$f(t,0)=0$(对$t\geqslant 0$)。

假设D是(1.1)的不变集，即对$t=t_0>0$时初值为$x^0\in D$的方程组(1.1)的解$x(t,x^0,t_0)$满足

$$x(t,x^0,t_0)\in D \quad (\text{对一切}t\geqslant t_0) \tag{1.3}$$

显然$x=0$是(1.1)的(驻定)解。

对满足$x\in D$的x定义$\xi(x)$为

$$\xi(x)=\begin{cases}\|x\| & \text{当}\bar{D}\backslash D=\phi\\ \max\left\{\|x\|,\dfrac{1}{\rho(x,\bar{D}\backslash D)}\right\} & \text{当}\bar{D}\backslash D\neq\phi\end{cases} \tag{1.4}$$

$$\rho(x,\bar{D}\backslash D)=\{\inf\|x-x^*\|: x^*\in\bar{D}\backslash D\}$$

因我们仅在D中考虑稳定性问题，故当$x\notin D$时$\xi(x)$没有定义。

定义1.1 方程组(1.1)的零解称为在域**D内稳定**的，如果对任意小的$\varepsilon>0$有$\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$使当$\xi(x^0)<\delta$时，有$\xi(x(t,x^0,t_0))<\varepsilon$(对$t\geqslant t_0$)。

如果$\delta=\delta(\varepsilon)$不依赖于$t_0$则称为在域**D内一致稳定的**。零解在域$D$内不是稳定的，则称它为在域**D内不稳定**。也就是说，有正数ε_0，不管$\delta>0$多么小($\delta<\varepsilon_0$)总存在x^0满足条件$\xi(x^0)<\delta$，而且有$T_0\geqslant t_0$使得$\xi(x(T_0,x^0,t_0))=\varepsilon_0$。

定义1.2 方程组(1.1)的零解称为在域**D内吸引**的，如果存在$\delta_0=\delta_0(t_0)>0$使得当$\xi(x^0)<\delta_0$时，有

$$\lim_{t\to\infty}\xi(x(t,x^0,t_0))=0 \tag{1.5}$$

即对任意小的$\varepsilon>0$，有$T=T(\varepsilon,t_0,x^0)$使得当$t\geqslant t_0+T$时有

$$\xi(x(t,x^0,t_0))<\varepsilon \tag{1.6}$$

如果δ_0不依赖于t_0，$T=T(\varepsilon)$不依赖于t_0,x^0，则称零解在域**D内一致吸引的**。

如果前面的δ_0可以任意大，即对任意的$x^0\in D$关系式(1.5)成立，则零解称为在域**D内全局吸引**的。

零解称为在域**D内全局一致吸引**的，如果对任意大的$r>0$和任意小的$\varepsilon>0$，存在$T=T(\varepsilon,r)$使得对任意的$x^0,t_0\geqslant 0$，只要$\xi(x^0)<r$则当$t\geqslant t_0+T$时不等式(1.6)均成立。零解称为在域**D内一致有界**的，如果对任意大的$r>0$，存在$\sigma=\sigma(r)>0$使得对任意的$x^0,t_0\geqslant 0$只要$\xi(x^0)\leqslant r$便有

$$\xi(x(t,x^0,t_0))\leqslant\sigma \quad (\text{对}t\geqslant t_0)$$

定义1.3 方程组(1.1)的零解称为在域**D内渐近稳定**的，如果它在域D内稳定，而且是在域D内吸引的。零解称为在域**D内一致渐近稳定**的，如果它是在域D内一致稳定且是在域D内一致吸引的。零解$x=0$称为在域**D内全局渐近稳定**的，如果它是在域D内稳定且是在域D内全局吸引的。零解$x=0$称为在域**D内全局一致渐近稳定**的，如果它是在域D内一致稳定，且在域D内一致有界，同时它又是在域D内全局一致吸引的。

定义1.4 假设存在域 D内定义的实连续函数 $f(x)$，$f(0)=0$，如果定义1.1，1.2，1.3中有关域D内的稳定性的定义如(一致)稳定，(一致)吸引，(一致)渐近稳定，全局(一致)吸引，全局(一致)稳定。均是在条件$f(x^0)\geqslant 0$下成立的，则相应地称**零解对$f(x)\geqslant 0$在域D内条件**(一致)稳定。条件(一致)吸引、条件(一致)渐近稳定、条件全局(一致)吸引、条件全局(一致)渐近稳定，简称为有相应的**条件稳定性**。

现在考虑域D内定义且连续的函数$W(x)$及在域G或域D内定义且有连续偏导数的函数$V(t,x)$或$V(x)$，其中$W(0)=0$，$V(t,0)=0$(对$t\geqslant 0$)或$V(0)=0$。

定义1.5 函数V称为在域**D内常正**(或**常负**)的，如果在G内有$V(t,x)\geqslant 0$(或$\leqslant 0$)。在域D内常正和常负的函数称为在域**D内常号**的函数。

函数$W(x)$称为在域**D内定正**(或**定负**)的，如果对任$\xi(x)\neq 0$，均有$W(x)>0$(或<0)。函数$V(t,x)$称为在域**D内定正**(或**定负**)的，如果存在域D内定正(或定负)的函数$W(x)$，使得在G内有$V(t,x)\geqslant W(x)$(或$V(t,x)\leqslant -W(x)$)。

在域D内定正或定负的函数统称为**域D内定号**的函数。

定义1.6 函数$V(t,x)$称为在域**D内有无限小上界**，如果存在函数 $W^*(x)$、$W^*(0)=0$使在G中满足$|V(t,x)|\leqslant W^*(x)$。

函数$V(t,x)$称为在域**D内有无限大下界**，如果存在连续函数$W_*(x)$使得在G内满足$|V(t,x)|\geqslant W_*(x)$，而且

$$\lim_{\xi(x)\to\infty} W_*(x)=\infty.$$

一般把"在域D内定正"简称为"D内定正"等等，而且用V在域D内定正、有无限小上界和无限大下界表示定为正、无限小上界和无限大下界均在域D内成立，而不必对每个定义都冠之于"在域D内"。

我们可以将关于李雅普诺夫稳定性的定理和关于全局渐近稳定性定理推广成域D内的稳定性定理。大部分定理的证明都可以把原来定理的证明在区域D的限制条件下类似地讨论，这里，仅列出基本定理的推广及证明关于域D内全局渐近稳定性的定理。

定理1.1 方程组(1.1)的零解在域D内是稳定的，如果存在D内定正的函数$V(t,x)$。其通过(1.1)的全导数$\dot V$在D内常负。如果$V(t,x)$在D内有无限小上界，则(1.1)的零解在D内还是一致稳定的。

定理1.2 方程组(1.1)的零解$x=0$在域D内是一致渐近稳定的，如果存在函数$V(t,x)$，它在D内定正具无限小上界，而全导数$\dot V$在D内定负。

定理1.3 方程组(1.1)的零解在域D内是不稳定的，如果存在函数$V(t,x)$，它在D内有无限小上界，$\dot V$在D内定正，且对一切$t\geqslant 0$有任意小的$x^0\in D$，使$V(t,x^0)>0$；或者存在函数$V(t,x)$，在D内有界，且在G内成立$\frac{dV}{dt}=\lambda V+W$，其中$\lambda>0$，$W(t,x)$为常号函数，而当$W\neq 0$时对一切$t\geqslant 0$，有任意小的$x^0\in D$使$V(t,x^0)$、$W(t,x^0)>0$。

定理1.4 方程组(1.1)的零解在区域D内为全局一致渐近稳定的，如果存在函数$V(t,x)$，它在D内定正，具无限小上界和无限大下界，且$\dot V$在D内定负。

证 依定理假设，在域D内，存在连续函数$W_s(x)$ $(s=1,2,3)$使得在域G内满足：

$$W_1(x)\leqslant V(t,x)\leqslant W_2(x),\quad \dot V(t,x)\leqslant -W_3(x) \tag{1.7}$$

而且 $\lim\limits_{\xi(x)\to\infty} W_i(x)=\infty\ (i=1,2)$，$\xi(x)$如(1.6)所示。

根据定理1.1，方程组(1.1)的零解是一致稳定的。

现在证明(1.1)的解在域D内是一致有界的。对任意大的$r>0$，取$M_1=\sup\limits_{\xi(x)<r} W_2(x)$，由于$W_1(x)$连续且$\lim\limits_{\xi(x)\to\infty} W_1(x)=\infty$，因此存在$\sigma>0$，使得$W_1(x)\leqslant M_1$时$\xi(x)\leqslant\sigma$，于是当$\xi(x^0)\leqslant r$，对任$t_0\geqslant 0$，(1.1)的解$x(t,x^0,t_0)$由域$D$的假设有$x(t,x^0,t_0)\in D$(对$t\geqslant t_0$)。且由于在$D$中有(1.7)即$\dot V(t,x)\leqslant 0$，因此依(1.7)更有

$$W_1(x(t,x^0,t_0))\leqslant V(t,x(t,x^0,t_0))\leqslant V(t_0,x^0)\leqslant W_2(x^0)\leqslant M_1$$

于是$\xi(x(t,x^0,t_0))\leqslant\sigma$，这就证明了(1.1)的解在域$D$内是一致有界的。

再证明(1.1)的零解是在域D内全局一致吸引的。对任意大的$r>0$，和任意小的$\varepsilon>0$，($\varepsilon<\rho_0$)，由前面证明的一致有界性，有$\sigma=\sigma(r)$，再由$W_s(x)$连续且$W_s(0)=0$，$\lim\limits_{\xi(x)\to\infty} W_i(x)=\infty\ (s=1,2,3,i=1,2)$知道有

$$l=\inf_{\varepsilon\leqslant\xi(x)\leqslant\sigma} W_1(x),\qquad m_1=\sup_{\xi(x)\leqslant r} W_2(x) \tag{1.8}$$

对$l>0$又有$\mu>0$使得$\xi(x)<\mu$时$W_2(x)<l$，且

$$l^*=\inf_{\mu\leqslant\xi(x)\leqslant\delta} W_1(x),\qquad m=\inf_{\mu\leqslant\xi(x)\leqslant\sigma} W_3(x) \tag{1.9}$$

令$T=T(\varepsilon,r)>(m_1-l^*)/m$，则对(1.1)的解$x(t,x^0,t_0)$，如果$\xi(x^0)<r$，$x^0\in D$，$t_0\geqslant 0$则由域$D$的定义$x(t,x^0,t_0)\in D$(对$t\geqslant t_0$)依一致有界性$\xi(x(t,x^0,t_0))\leqslant\sigma$，我们证明在$[t_0,t_0+T]$区间中存在$t^*$使得$\xi(x(t^*,x^0,t_0))\geqslant\mu$，否则$t\in[t_0,t_0+T]$均有$\xi(x(t,x^0,t_0))\geqslant\mu$。于是由(1.7)及(1.8)、(1.9)得

$$V(t,x(t,x^0,t^0))\leqslant V(t_0,x^0)+\int_{t_0}^{t_0+T}\dot V(t,x(t,x^0,t_0))\,dt$$

$$\leqslant W_2(x^0)-\int_{t_0}^{t_0+T}W_3(x(t,x^0,t_0))\,dt\leqslant m_1-mT<l^*$$

而由(1.7)及(1.9)又有：$V(t,x(t,x^0,t_0)\geqslant W_1(x(t,x^0,t_0))\geqslant l^*$与上式矛盾。因此有$t^*\in[t_0,t_0+T]$使得$\xi(x(t^*,x^0,t_0))<\mu$。

这样，当$t\geqslant t_0+T\geqslant t^*$时由$\dot V\leqslant 0$及$\mu$的定义得

$$W_1(x(t,x^0,t_0))\leqslant V(t,x(t,x^0,t_0))\leqslant V(t^*,x(t^*,x^0,t_0))\leqslant W_2(x(t^*,x^0,t_0))<l$$

依(1.8)中l的定义便证明了当$t\geqslant t_0+T$时有

$$\xi(x(t,x^0,t_0))<\varepsilon$$

由于$T=T(\varepsilon,r)$不依于t_0，x^0，所以零解是在域D内全局一致吸引的。

根据定义1.3，(1.1)的零解是在域D内全局一致渐近稳定的。□

考虑自治微分方程组

$$\dot x=f(x) \tag{1.10}$$

其中$f(x)$在域D内连续且满足局部Lipschitz条件，$f(0)=0$。类似地可以证明

定理1.5 对于方程组(1.10)如果在域D内存在无限大定正函数$V(x)$，其通过(1.10)的全导数$\dot V$在D内是常负的，而且在集合$M=\{x:\dot V(x)=0,\ x\in D\}$上不包含组(1.10)

的非平凡正半轨线，则(1.10)的零解是在D内全局渐近稳定的。

定理1.6 对于方程组(1.10)，如果它在D内的一切正半轨线均不趋于无穷或者$\bar{D}\backslash D$（如果$\bar{D}\backslash D\neq\phi$），同时存在在$D$内的定正函数$V(x)$，它通过(1.10)的全导数是常负的，而且集合$M=\{x:\dot{V}(x)=0,\ x\in D\}$不包含任何非平凡正半轨线。则(1.10)的零解是在D内全局渐近稳定的。

〔例〕 考虑Volterra生态系统

$$\dot{x}_s=x_s\left(r_s+\sum_{j=1}^{n}a_{sj}x_j\right),\qquad s=1,\cdots,\tag{1.11}$$

这里X_s表示第s个种群的数量密度，因种群数量不能变为负值，故仅需在$x_s\geqslant0$或$x_s>0$中讨论。因此可行区域为

$$D_0=\{(x_1,\cdots,x_n)\ x_s\geqslant0,\ s=1,\cdots,n\}$$
$$D_*=\{(x_1,\cdots,x_n):x_s>0\quad s=1,\ \cdots,n\}$$
$$D_I=\{(x_1,\cdots,x_n):x_i\geqslant0,\ x_j>0,\ j\in I,\ i\in J,\ I\cup J=\{1,\cdots,n\},\ I\cap J=\phi\}$$

其中域D_0其种群可能绝种$(x_s=0)$，域D_*则不考虑绝种情况$(x_s\neq0)$，域D_I是部分可能绝种($i\in I$时)部分不考虑绝种($j\in J$时)的情形。

由方程组(1.11)的形状，显然当$x^0\in D_0$时必有$x(t,x^0,t_0)\in D_0$(对$t\geqslant t_0$)同样当$x^0\in D_*$时有$x(t,x^0,t_0)\in D_*$(对$t\geqslant t_0$)，而当$x^0\in D_I$时亦有$x(t,x^0,t_0)\in D_I$(对$t\geqslant t_0$)。即只要驻定解$x^*\in D_0$，$x^*\in D_*$或者$x^*\in D_I$，便可以考虑在D_0内，D_*内或者D_I内关于解$x=x^*$的稳定性。例如对于驻定解$x_s=0$，$x_s=x_s^*,x_i=0,x_j=x_j^*$相应地可以取$V$函数为

$$V_0=\sum_{s=1}^{n}p_sx_s$$

$$V_*=\sum_{s=1}^{n}p_s\left(x_s-x_s^*-x_s^*\ln\frac{x_s}{x_s^*}\right)$$

$$V_I=\sum_{i\in I}p_ix_i+\sum_{j\in J}p_j\left(x_j-x_j^*-x_j^*\ln\frac{x_j}{x_j^*}\right)$$

其中$p_s>0$ $(s=1,\cdots,n)$。它们对各自的域D_0,D_*,D_I均是域内的定正函数，具无限小上界和无限大下界。例如对域D_I，在D_I内的函数V_I的无限大下界性质要求$\xi(x)\to\infty$时$V_I\to\infty$，即当$x_i\to\infty$或$x_j\to\infty$或$x_j\to0$，$i\in I$，$j\in J$时$V_I\to\infty$。域D_I内的稳定性又称为扇形稳定性。

§2 临界情形的区域稳定性

区域D如前面所定义，考虑微分方程组

$$\dot{y}=F(t,y)\tag{2.1}$$

其中y、F为p维向量，$F(t,0)=0$(对$t\geqslant0$)，F在域D内的原点$y=0$邻域是y的正则函数，展式系数为t的有界连续函数。

定义2.1 如果对任意连续函数$G(t,y)$在域D内的原点邻域内满足

$$\|G(t,y)\|<K\|y\|^{N+1}, \qquad K>0$$

时方程组

$$\dot{y}=F(t,y)+G(t,y) \tag{2.2}$$

的零解在域D内是(一致)稳定、(一致)渐近稳定、条件(一致)稳定。条件(一致)渐近稳定或者是不稳定的，则相应地称方程组(2.1)的零解是**不依赖高于N次项**(一致)稳定、(一致)渐近稳定、条件(一致)稳定、条件(一致)渐近稳定、或者是不稳定的。

现在考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{y}=F(t,y)+Y(t,y,z) & (a)\\ \dot{z}=Qz+Z(t,y,z) & (b)\end{cases} \tag{2.3}$$

其中y、z各为p、q维变量、矩阵Q的特征方程的根均具负实部、F、Y、Z是y、z的正则函数，其系数展式是t的有界连续函数。而且

$$\begin{gathered}F(t,y)=[y]_1,\quad Y(t,y,z)=\sum_{s\geqslant s_0}Y_s(t,z)y^{(s)},\ Y_s(t,z)=[z]_{T_s}\\ Z(t,y,0)=[y]_2,\ Z(t,0,z)=[z]_2,\ s_0\geqslant 0,\ T_s\geqslant 1,\ k\geqslant 2\end{gathered} \tag{2.4}$$

这里$y^{(s)}$是y的s次型，可排列成C_s^{s+p-1}维向量，Y_s为$p\times C_s^{s+p-1}$维矩阵。

定理2.1 如果存在正整数m，使得(2.4)的右端参数满足

$$m<k+\min_{T_s=1}\{s\} \tag{2.5}$$

即表示Y关于z的一次项展式中y的最低次数与k之和大于m，而方程组

$$\dot{y}=F(t,y)$$

的零解在域D内是不依赖高于m次项稳定、渐近稳定、条件稳定、条件渐近稳定或不稳定的，则对方程组(2.3)的零解在域D内有相应的稳定性态。

定理2.1可根据前面的结果仿照[5]类似地证明。

[例]考虑Volterra竞争系统的临界情形(见[6](2.5))

$$\begin{aligned}\dot{z}_k=&-Z_k((D_{kk}-D_{kp}D_{pp}^{-1}D_{pk}-D_{kp}D_{pp}^{-1}D_{pp}^{-1}D_{pk}Z_k(D_{kk}-D_{k.}D_{pp}^{-1}D_{pk}))z_k\\ &+(D_{kr}-D_{kp}D_{pp}^{-1}D_{pr})z_r+D_{kp}D_{pp}^{-1}z_p)\\ \dot{z}_r=&Z_r(d_{r0}-(D_{rk}-D_{rp}D_{pp}^{-1}D_{pk}-D_{rp}D_{pp}^{-1}D_{pp}^{-1}D_{pk}Z_k(D_{kk}-D_{kp}D_{pp}^{-1}D_{pk}))z_k\\ &-(D_{rr}-D_{rp}D_{pp}^{-1}D_p)z_r-D_{rp}D_{pp}^{-1}z_p)\end{aligned}$$

$$\dot{z}_p=-D_{pp}z_p+D_{pr}Z_rd_{r0}+g_1(z_k)+g_2(z)z_r+g_3(z)z_p$$

如果$d_{r0}<0$，$-D_{pp}$稳定，则由方程右端知对z_k而言其右端关于z_r、z_p的展式中z_k为1次，而$k=3$因此根据定理2.1，取$m=2<4$其在域$D=\{(z_k,z_r,z_p):z_k\geqslant 0,\ z_r\geqslant 0,\ z_p\geqslant -1\}$内零解的稳定性态可由方程组

$$\dot{z}_k=-Z_k(D_{kk}-D_{kp}D_{pp}^{-1}D_{pk})z_k$$

不依赖高于2次项的稳定性态决定。

§3 区域有界性和耗散性

考虑微分方程组

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{3.1}$$

其中x为n维向量，假使$f(t,x)$在域$G=\{(t,x):t\geqslant 0,x\in D\}$上连续，其中$D$是$R^n$内$n$维单连通区域。假定$x^0\in D$时，(3.1)的解$x(t,x^0,t_0)\in D$(对$t\geqslant t_0$)。

定义3.1 称方程组(3.1)的解在域**D内有界**，如果对任$t_0>0,x^0\in D$均有$\sigma=\sigma(t_0,x_0)>0$，使得(3.1)的解对$t\geqslant t_0$均有

$$\xi(x(t,x^0,t_0))<\sigma. \tag{3.2}$$

称(3.1)的解为一致有界的，如果对任意大的$r>0$，有$\sigma=\sigma(r)>0$，使得对任$t_0\geqslant 0$，$\xi(x^0)\leqslant r$，均有$\xi(x(t,x^0,t_0))\leqslant\sigma$ (对$t\geqslant t_0$)。

定理3.1 对方程组(3.1)，如果存在函数$V(t,x)$，在域D内定正，具有无限大下界，而$\dot{V}$常负，则(3.1)的解在D内有界。

证 由$V(t,x)$在D内定正，知在D内有连续函数$W(x)$使得在D内$V(t,x)\geqslant W(x)$而且由V具无限大下界，知$\lim\limits_{\xi(x)\to\infty}W(x)=\infty$。因此对任意的$x^0\in D$，$t_0\geqslant 0$存在$\sigma>0$，使得当$\xi(x)\geqslant\sigma$时，$W(x)>V(t_0,x_0)$

于是由$\dot{V}$常负知对(3.1)的解$x(t,x^0,t_0)$当$t\geqslant t_0$时有

$$W(x(t,x^0,t_0))\leqslant V(t_1x(t,x^0,t_0)\leqslant V(t_0,x(t_0,x^0,t_c))=V(t_0\,x_0)$$

根据σ的定义便得$\xi(x(t,x^0,t_0))<\sigma$。故(3.1)的解是有界的。 □

定理3.2 对方程组(3.1)如果有$R>0$且存在函数$V(t,x)$，它在域$\xi(x)\geqslant R$内定正，具无限小上界和无限大下界，而$\dot{V}$常负，则(3.1)的解在D内一致有界。

证 由$V(t,x)$的性质知有连续函数$W_1(p),W_2(x)$在$\xi(x)\geqslant R$内。

$$W_1(x)\leqslant V(t,x)\leqslant W_2(x)$$

而且$\lim\limits_{\xi(x)\to\infty}W_i(x)=\infty$。$(i=1,2)$

于是对任$\gamma>R$有$r=\sup\limits_{R<\xi(x)<\gamma}W_2(x)>0$ r对又有$\sigma>R$使得当$\xi(x)>\sigma$时$W_1(x)>r$

对任意的$t_0\geqslant 0,\xi(x^0)<r$ (3.1)的解$x(t,x^0,t_0)\in D$(对$t\geqslant t_0$)而且当$\xi(x(t,x^0,t_0))<R$时(3.2)成立，而当$R\leqslant\xi(x(t^*,x^0,t_0))\leqslant r$时，由$\dot{V}\leqslant 0$对$t\geqslant t^*\geqslant t_0$得

$$W_1(x(t,x^0,t_0))\leqslant V(t,x(t,x^0,t_0))\leqslant V(t^*,x(t^*,x^0,t_0))\leqslant W_2(x^*r)<r$$

根据σ的定义有$\xi(x(t,x^0,t_0))<\sigma$故(3.1)的解是一致有界的。 □

定义3.2 方程组(3,1)称为是在域**D内耗散**的，如果存在常数$\sigma>0$，使得对任$t_0\geqslant 0$，$x^0\in D$均存在$T=T(t_0,x^0)$，当$t\geqslant t_0+T$时有

$$\xi(x(t,x^0,t_0))<\sigma \tag{3.3}$$

如果对任意大的$r>0$，均有$T=T(r)>0$，使得对任$t_0\geqslant 0$，$\xi(x^0)<r$，当$t\geqslant t_0+T$时(3.3)成立，则称(3.1)在D内是一致耗散的。

定理3.3 假设对方程组(3.1)在域$\xi(x)\geqslant R$内存在定正函数$V(t,x)$，具无限小上界和无限大下界，且$\dot{V}$是定负的。则(3.1)在D内是一致耗散的。

证 由V的定义，在域$\xi(x)\geqslant R$内存在连续正值函数，$W_1(x)$，$W_2(x)$，$W(x)$使得当$\xi(x)\geqslant R$(自然要求$x\in D$)时有

$$W_1(x)\leqslant V(t,x)\leqslant W_2(x),\ \dot V(t,x)\leqslant -W(x) \tag{3.4}$$

而且$\lim\limits_{\xi(x)\to\infty} W_i(x)=\infty$。

根据定理3.2，(3.1)是一致有界的，故对R有$H=H(R)>R$，使得对任$t_0\geqslant 0$、$\xi(x^0)<R$均成立$\xi(x)>H$。对于任意大的$r\geqslant R$，又有$\sigma=\sigma(r)>r$使得对任$t_0\geqslant 0$、$\xi(x^0)<r$均成立(3.3)。令

$$l=\inf_{R\leqslant\xi(x)\leqslant\sigma} W_1(x),\qquad M=\sup_{R\leqslant\xi(x)\leqslant r} W_2(x)$$

$$m=\inf_{R\leqslant\xi(x)\leqslant\sigma} W(x) \tag{3.5}$$

取$T=T(r)>\dfrac{1}{m}(M-l)$，则对任$t_0\geqslant 0$、$\xi(x^0)<r$我们证明存在$t^*\in[t_0,t_0+T]$使得$\xi(x(t^*,x^0,t_0))<R$，否则$t\in[t_0,t_0+T]$均有$\xi(x(t,x^0,t_0))\geqslant R$，于是(3.4)成立，且由(3.2)得

$$V(t_0+T,x(t,x^0,t_0))\leqslant V(t_0,x^0)+\int_{t_0}^{t_0+T}\dot V(t,x(t,x^0,t_0))d\tau$$

$$\leqslant W_2(x^0)=\int_{t_0}^{t_0+T}W(x(t,x^0,t_0))d\tau\leqslant M-mT<l$$

即

$$W_1(x(t_0+T,x^0,t_0))\leqslant V(t_0+T,x(t_0+T,x^0,t_0))<l$$

而由(3.5)又得$x(t_0+T,x^0,t_0)\geqslant l$，产生矛盾。

于是得$\xi(x(t^*,x^0,t_0))<R$，即对任$t\geqslant t_0+T\geqslant t^*$均有$\xi(x(t,x^0,t_0)<H$，因此对域$H$而言，(3.1)是在域$D$内的一致耗散系统。定理得证。 □

〔例〕考虑在文〔7〕讨论的资源竞争系统

$$\begin{cases}\dot S=(s^0+be(t)-s)D-\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{m_i}{y_i}f_j(s)x,\\ \dot x_i=(m_if_i(s)-D_i)x_i\quad i=1,\cdots,n\end{cases} \tag{3.6}$$

$$G=\{(s,x):\ s>0,\ x\geqslant 0\}$$

$$G^*=\{(s,x):\ s>0,x_1>0,\ x_j\geqslant 0,j=2,\cdots,n\}$$

由文〔7〕定理1知系统(3.6)在域G内是耗散的。

如果$n=1$时(3.6)满足文〔7〕定理5的条件，则由定理5知对$n=1$，(3.6)在域G内是耗散的。

如果(3.6)满足文〔7〕定理5推论的条件，则(3.6)在域G^*内是耗散的。

参考文献

〔1〕Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

〔2〕许淞庆，常微分方程稳定性理论，上海科技出版社，1962.
〔3〕Барбашин, Е. А., Красовский Н.Н., Об устойчивости движения в целом ДАН СССР, 86, №6, 1952.
〔4〕Красовский, Н.Н., Некоторые задази теории устойчивости движения Физматгиз, 1959.
〔5〕朱思铭，乘积空间稳定性与微分方程组临界情形(I)(II)，中山大学学报(自然科学版) 1962, 4; 1963, 3.
〔6〕朱思铭，n维Volterra竞争系统的绝种轨线，中山大学学报(自然科学)论丛〔3〕，1984.
〔7〕朱思铭，一类高维资源竞争系统的极限性态，科学通报，16,1984.

Domain Stability Theory

Zhu Siming

Abstract

Liapunov stability theory is only concerned with the small neibourhord of the critical point, while stability in the large generalized the neibourhord to the whole space or the domain D in Euclidean space. This paper establishes the stability theory of single connected domain D whole boundary may be open or closed, may be The results have direct applications to ecosystems, electrical power systems etc.