复合型偏微分方程组的若干问题

林　伟　　　　吴兹潜
（数学系）　　（计算机科学系）

摘　要

本文先讨论平面二阶第二类复合型偏微分方程组 (C_2) 的另一标准型及一般解，然后令 $k\to 0$（两不同实特征变为重特征）获得平面二阶第一类复合型方程组 (C_1) 的标准型和一般解。用同样的方法也统一处理了 (C_2) 与 (C_1) 的第一问题。本文还证明了 (C_2) 方程组有关的对顶点定理，并给出其应用。

复合型偏微分方程（组）是一类非经典的但十分有趣的偏微分方程（组）。它们不但具有椭圆型方程（组）的特征，而且有双曲方程（组）的特征。由于这些方程（组）紧密联系着象海洋可压缩不均匀流的振动[1] 等力学、物理问题，所以引起人们重视。近年来，R. P. Gilbert[2]，H. Begehr[3]，A. Джураев[4] 等人应用函数论的方法研究了一阶复合型偏微分方程组。本文将应用这些方法去解决一类二阶复合型偏微分方程组的若干问题。

§1. 标准型和一般解

在文〔5〕（第一章）中，我们已证明平面二阶两个未知函数的复合型线性偏微分方程组可分为两类。第一类复合型偏微分方程组可化为如下标准型

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}0&1\\b&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0,\quad (C_1)$$

$\lambda-4b=1,\ b\neq 0,$

它具有特征四次型 $\xi^2(\xi^2+\eta^2)$ 和一般解

$$\begin{cases}u=f_1(y)+f_3(z)+\overline{f_3(z)}\\ v=-\dfrac{\lambda}{2}xf'_1(y)+f_2(y)-2bi\,[f_3(z)-\overline{f_3(z)}\,].\end{cases}\quad (C_1^*)$$

第二类复合型组可化为标准型

本文1984年8月收到

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}k & 1\\b & k\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0 \qquad (1.1)$$

$$b=k^2-ak+\frac{1}{4}\neq 0, \quad 0<a<1, \quad k\neq 0.$$

它具有特征四次型 $\xi\eta(\xi^2+2a\xi\eta+\eta^2)$，$(0<a<1)$ 和一般解

$$\begin{cases}u=f_2(y)+f_3(x-\lambda_1 y)+f_4(x-\lambda_2 y),\\ v=f_1(x)+\dfrac{1-2k\lambda_1}{2\lambda_1}f_3(x-\lambda_1 y)+\dfrac{1-2k\lambda_2}{2\lambda_2}f_4(x-\lambda_2 y)\end{cases} \qquad (1.2)$$

这里 $\overline{\lambda_2}=\lambda_1=a-i\sqrt{1-a^2}$。

为了应用函数论的方法和统一处理第一、二类复合型方程组，我们将首先改变第二类复合型组的标准型为另一形式。为此，仿照[5]第一章的做法，我们先把它的特征四次型化为

$$F(\xi,\eta)=(\xi^2+\eta^2)(\xi^2-k^2\eta^2), \qquad k>0.$$

事实上，假设第二类复合型组的特征四次型具有的两不同实根 a_1，a_2，和一对复根 τ_1，$\overline{\tau_1}$，我们可过 τ_1，$\overline{\tau_1}$ 作一圆以 a_1 和 a_2 为其对称点。显见，这圆的方程是

$$\Gamma:\left|\frac{z-a_1}{z-a_2}\right|=k_0, \qquad k_0=\left|\frac{\tau_1-a_1}{\tau_1-a_2}\right|.$$

用 p，q 表圆 Γ 与实轴的两个交点，那么，线性变换

$$W=\rho\frac{z-q}{z-p}, \qquad \rho\text{——实数}$$

将分别把点 τ_1，$\overline{\tau_1}$，a_1，a_2 映射为点 i，$-i$，$-k$，k $(k>0)$。这意味着如果我们作自变数线性变换

$$\begin{cases}x_1=\rho x+y\\ y_1=-\rho qx-py\end{cases}$$

则方程组所对应的特征四次型将具有如下形式[6]

$$F(\xi,\eta)=(\xi^2+\eta^2)(\xi^2-k^2\eta^2), \qquad k>0, \qquad (\tilde{C}_2)$$

类似文[5]（第一章）的做法，从特征四次型（$\tilde{C}_2$）出发，通过未知函数的线性变换与方程间的线性组合，我们可把第二类复合型方程组化为

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}0 & 1\\-2b & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & -2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0, \qquad (1.3)$$

$$\lambda+\mu-4b=1-k^2, \quad \lambda\mu=-k^2, \quad k>0, \quad b\neq 0.$$

注意及

$$\mu=-\frac{k^2}{\lambda}, \quad -4b=(1-\lambda)\left(1+\frac{k^2}{\lambda}\right),$$

我们有

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ (1-\lambda)\left(1+\frac{k^2}{\lambda}\right) & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \frac{2k^2}{\lambda}\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0,\quad(1.4)$$

左乘上式以$\begin{pmatrix}1+\frac{k^2}{\lambda} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$和右乘以$\begin{pmatrix}\left(1+\frac{k^2}{\lambda}\right)^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，

我们得标准型

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\begin{pmatrix}0 & 2\left(1+\frac{k^2}{\lambda}\right)\\ (1-\lambda) & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \frac{2k^2}{\lambda}\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0,\quad(C_2)$$

即得

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0 & \frac{2k^2}{\lambda}\\ \lambda & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0.$$

不难证明，(C_2)的一般解是

$$\begin{cases}u=f_1(y-kx)+f_2(y+kx)+\left(1+\frac{k^2}{\lambda}\right)\left[f_3(z)+\overline{f_3(z)}\right],\\ v=\frac{\lambda}{2k}\left[f_1(y-kx)-f_2(y+kx)\right]+\frac{1-\lambda}{2}i\left[f_3(z)-\overline{f_3(z)}\right],\end{cases}\quad(C_2^*)$$

这里f_1，f_2是二次可微的任意实函数，$f_3(z)$是复变量$z=x+iy$的任意解析函数。

现在我们证明第一类复合型组(C_1)及其一般解(C_1^*)可以分别由(C_2)及其一般解(C_2^*)令$k\to0$取极限而获得。事实上，在第二类复合型组(C_2)中，令$k\to0$，即得

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{\lambda-1}{2} & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0.\quad(1.5)$$

左乘(1.5)以$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，我们得，

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{\lambda-1}{4} & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0,\quad(1.6)$$

这正好是(C_1)（注意及在(C_1)中，$b=\frac{\lambda-1}{4}$）。为了从(C_2^*)导出(C_1)的一般解(C_1^*)，我们取

$$f_1(y-kx)=\frac{1}{2}g_1(y-kx)$$

$$f_2(y+kx)=\frac{1}{2}g_1(y+kx)-\frac{2k}{\lambda}g_2(y+kx),$$

由 (C_2^*) 我们得

$$u=\frac{1}{2}\left[g_1(y-kx)+g_2(y+kx)\right]-\frac{2k}{\lambda}g_2(y+kx)+\left(1+\frac{k}{\lambda}\right)[(f_3(z)+\overline{f_3(z)}],$$

$$v=\frac{\lambda}{4}\frac{g_1(y-kx)-g_1(y+kx)}{k}+g_2(y+kx)+\frac{1-\lambda}{2}i[f_3(z)-\overline{f_3(z)}].$$

令 $k\to 0$，取极限我们得

$$u=g_1(y)+[f_3(z)+\overline{f_3(z)}],$$

$$v=-\frac{\lambda}{2}xg_1'(y)+g_2(y)+\frac{1-\lambda}{2}i[f_3(z)-\overline{f_3(z)}].$$

这正好是 (C_1) 的一般解 (C_1^*)。综合上述我们得

定理1　令 $k\to 0$，第二类复合型组 (C_2) 变成第一类复合型组 (C_1)。而且其对应的一般解 (C_2^*) 变成 (C_1^*)。

§2. 复合型组的第一问题

从一般解 (C_2^*) 可以看到，复合型组 (C_2) 具有二族特征线 $y+kx=\text{const}$ 和 $y-kx=\text{const}$。其中第一族中的

$$y+kx=\sqrt{1+k^2} \text{ 与 } y+kx=-\sqrt{1+k^2}$$

与单位圆 $|z|=1$ 分别切于点 $A\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}},\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ 和点 $C\left(-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}},-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$，第二族的

$$y-kx=\sqrt{1+k^2} \text{ 和 } y-kx=-\sqrt{1+k^2}$$

与单位圆 $|z|=1$ 分别相切于点 $B\left(-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}},\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ 和点 $D\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}},-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$。

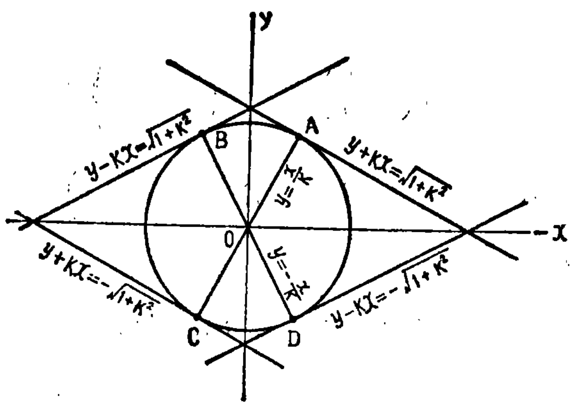

图　1

(图1)显见直线 $y=\frac{x}{k}$ 和 $y=-\frac{x}{k}$ 分别与第一特征线族 $y+kx=\text{const}$ 和 $y-kx=\text{const}$ 相垂直，而线段 $\overline{AC}$ 是 $y=\frac{x}{k}$ 在 $|z|<1$ 内所

截的部份，$\overline{BD}$是$y=-\frac{x}{k}$在$|z|<1$内所截的部份。（图1）

复合型组(C_2)的第一问题是在单位圆内$|z|<1$，求(C_2)的解u，v使它们适合如下定解条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2k^2}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{|z|=1}=\chi(\zeta),\qquad |\zeta|=1, \tag{2.1}$$

$$u\Big|_{x=ky}=\Psi(y),\qquad -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant y\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \tag{2.2}$$

$$v\Big|_{x=-ky}=\varphi(y),\qquad -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant y\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \tag{2.3}$$

这里$\chi(\zeta)$是给定在单位圆$\zeta=e^{i\theta}$，$(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$上的连续函数，$\Psi(y)$和$\varphi(y)$是给定在$\left[-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right]$上的二次可微函数，并且适合

$$\begin{aligned}&|\Psi(y)|\leqslant M_1|y|,\\&|\varphi(y)|\leqslant M_2|y|.\end{aligned}\qquad -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant y\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \tag{2.4}$$

作为求解第一问题的准备，我们可证明如下一个关于函数方程的引理（〔5〕第二章）。

引理1 已知A，α，a是实常数，$|\alpha|<1$，$|A\alpha|<1$，$a>0$。假设$h(t)$是在〔$-a$，a〕上的连续函数并且满足条件

$$|h(t)|\leqslant M|t|,\qquad |t|\leqslant a$$

这里$M>0$是一常数。那么函数方程

$$f(t)=Af(\alpha t)+h(t),\qquad -a\leqslant t\leqslant a \tag{F}$$

在〔$-a$，a〕上存在一连续解。这个解将是唯一的如果$f(t)$还适合条件

$$|f(t)|\leqslant M_1|t|,\qquad |t|\leqslant a.$$

现在我们来讨论(C_2)组第一问题的解。由一般解(C_2^*)不难证明

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-k[f_1'(y-kx)-f_2'(y+kx)]+\dfrac{\lambda+k^2}{\lambda}[f_3'(z)+\overline{f_3'(z)}],\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\lambda}{2k}[f_1'(y-kx)-f_2'(y+kx)]+\dfrac{(1-\lambda)i}{2}(i)[f_3'(z)+\overline{f_3'(z)}],\end{cases}$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2k^2}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial y}=2(1+k^2)\mathrm{Re}[f_3'(z)]. \tag{2.5}$$

由上式和已给边界条件(2.1)，我们得出解析函数$f_3'(z)$在单位圆$|z|=1$上具有如下的边界值：

$$\mathrm{Re}[f_3'(z)]\Big|_{|z|=1}=\frac{\chi(\zeta)}{2(1+k^2)}. \tag{2.6}$$

由Schwartz公式，立得

$$f_3'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\chi(e^{it})}{2(1+k^2)}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt+iC_1, \tag{2.7}$$

这里C_1是任意实常数，在上式中对z求积分，即得

$$f_3(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\chi(e^{it})}{2(1+k^2)}\left(\int_0^z\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dz\right)dt+iC_1z+C_2.$$

不失一般性，我们可设$C_2=0$，因之

$$\begin{cases}f_3(z)=-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\chi(e^{it})}{2(1+k^2)}\left(z+2e^{it}\ln\frac{e^{it}-z}{e^{it}}\right)dt+iC_1z,\\ f_3(0)=0.\end{cases} \tag{2.8}$$

为了求解函数f_1，f_2，我们将定解条件(2.2)和(2.3)代入一般解(C_2^*)，立得

$$\begin{aligned}\Psi(y)&=u\big|_{x=ky}\\&=f_1((1-k^2)y)+f_2((1+k^2)y)+\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}\mathrm{Re}[f_3((k+i)y)],\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\varphi(y)&=v\big|_{x=-ky}\\&=\frac{\lambda}{2k}[f_1((1+k^2)y)-f_2((1-k^2)y)]-\frac{2(1-\lambda)}{2}\mathrm{Im}[f_3((-k+i)y)].\end{aligned} \tag{2.10}$$

由此可得

$$f_2(t)=-f_1\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}t\right)+\Psi\left(\frac{t}{1+k^2}\right)-\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}\mathrm{Re}\left[f_3\left(\frac{k+i}{1+k^2}t\right)\right], \tag{2.11}$$

$$f_1(t)=f_2\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}t\right)+\frac{2k}{\lambda}\varphi\left(\frac{t}{1+k^2}\right)+\frac{2k(1-\lambda)}{\lambda}\mathrm{Im}\left[f_3\left(\frac{-k+i}{1+k^2}t\right)\right]. \tag{2.12}$$

将(2.11)代入(2.12)即得

$$\begin{aligned}f_1(t)=&-f_1\left(\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2t\right)+\Psi\left(\frac{1-k^2}{(1+k^2)^2}t\right)-\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}\mathrm{Re}\left[f_3\left(\frac{(1-k^2)(k+i)}{(1+k^2)^2}t\right)\right]\\&+\frac{2k}{\lambda}\varphi\left(\frac{t}{1+i^2}\right)+\frac{2k(1-\lambda)}{\lambda}\mathrm{Im}\left[f_3\left(\frac{-k+i}{1+k^2}t\right)\right],\\&-(1+k^2)<t<(1+k^2).\end{aligned} \tag{2.13}$$

这是未知函数$f_1(t)$的函数方程。由于$f_3(z)$在$|z|<1$解析且$f_3(0)=0$，故有

$$|f_3(t)|\leqslant M_3|t|,\quad |t|<1.$$

令

$$\begin{aligned}h_0(t):=&\Psi\left(\frac{1-k^2}{(1+k^2)^2}t\right)+\frac{2k}{\lambda}\varphi\left(\frac{t}{1+k^2}\right)\\&-\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}\mathrm{Re}\left[f_3\left(\frac{(1-k^2)(k+i)}{(1+k^2)^2}t\right)\right]\end{aligned}$$

$$+\frac{2k(1-\lambda)}{\lambda}\operatorname{Im}\left[f_3\left(\frac{-k+i}{1+k^2}t\right)\right],$$

利用条件(2.4)我们有

$$|h_0(t)|\leqslant M|t|. \quad |t|\leqslant\sqrt{1+k^2}. \tag{2.14}$$

注意及在(2.13)中$A=-1$，$\alpha=\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2<1$，由引理1我们得出函数方程(2.13)有唯一解。如果用$\omega(t)$表示这个解，则有

$$f_1(t)=\omega(t) \tag{2.15}$$

显然，$f_1(t)$是二阶可微的。将$f_1(t)$代入(2.11)，得

$$f_2(t)=-\omega\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}t\right)+\Psi\left(\frac{t}{1+k^2}\right)-\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}\operatorname{Re}\left[f_3\left(\frac{k+i}{1+k^2}t\right)\right]. \tag{2.16}$$

将(2.8)，(2.15)，(2.16)代入一般解(C_2^*)，最后我们得复合型组(C_2)的第一问题的解为

$$\begin{aligned}u=&\omega(y-kx)-\omega\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}(y+kx)\right)+\Psi\left(\frac{y+kx}{1+k^2}\right)\\&-\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\chi(e^{it})}{2(1+k^2)}\operatorname{Re}\left[\left(z-\frac{k+i}{1+k^2}(y+kx)\right)\right.\\&\left.+2e^{it}\ln\frac{e^{it}-z}{e^{it}-\frac{k+i}{1+k^2}(y+kx)}\right]dt\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}v=&\frac{\lambda}{2k}\left\{\omega(y-kx)+\omega\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}(y+kx)\right)-\Psi\left(\frac{y+kx}{1+k^2}\right)\right.\\&-\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\chi(e^{it})}{2(1+k^2)}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{(k+i)(y+kx)}{1+k^2}\right)\right.\\&\left.\left.+2e^{it}\ln\frac{e^{it}-\frac{(k+i)(y+kx)}{1+k^2}}{e^{it}}\right]dt\right\}\\&+\frac{2(1-\lambda)}{2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\chi(e^{it})}{2(1+k^2)}\operatorname{Im}\left[z+2e^{it}\ln\frac{e^{it}-z}{e^{it}}\right]dt+C_1x\right\}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

综上所述，我们有

定理2 设函数$\chi(\zeta)$在$|\zeta|=1$上连续，$\Psi(y)$与$\varphi(y)$是在$\left[-\sqrt{\frac{1}{1+k^2}},\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}\right]$上二次可微的函数，且满足条件

$$|\Psi(y)|\leqslant M_1|y|, \quad |\varphi(y)|\leqslant M_2|y|, \quad |y|\leqslant\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}.$$

那么复合型方程组 (C_2) 在 $|z|<1$ 内存在解(2.17)，(2.18)适合条件(2.1)—(2.3)。除去 v 相差一个 x 的任意一次式 cx 之外，解是唯一的。

根据定理2，不难获得第一类复合型组 (C_1) 第一问题的解。事实上，当 $k\to 0$ 时，特征线族 $y+kx=\text{const}$ 和 $y-kx=\text{const}$ 退化为重特征线族 $y=\text{const}$。此时，条件(2.1)，(2.2)，(2.3)变为

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{|z|=1}=\chi(\zeta), & |\zeta|=1, \\ u\big|_{x=0}=\Psi(y), & |y|\leqslant 1, \\ v\big|_{x=0}=\varphi(y), & |y|\leqslant 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

由(2.8)，我们有

$$f_3(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\chi(e^{it})}{2}\left[z+2e^{it}\ln\frac{e^{it}-z}{e^{it}}\right]dt+iC_1z. \tag{2.20}$$

令 u_1, v_1 表第一类复合型组 (C_1) 的第一问题的解，则当 $k\to 0$ 时，由(2.17)我们有

$$u_1=\lim_{k\to 0}u=\Psi(y)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(e^{it})\left[x+2\,\mathrm{Re}\left(e^{it}\ln\frac{e^{it}-z}{e^{it}-iy}\right)\right]dt. \tag{2.21}$$

由(2.12)我们有

$$f_2(t)=\omega\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}t\right)-\frac{2k}{\lambda}\varphi\left(\frac{t}{1-k^2}\right)-\frac{2k(1-\lambda)}{\lambda}\,\mathrm{Im}\left[f_3\left(\frac{-k+i}{1-k^2}t\right)\right],$$

代入 (C_2^*) 立得

$$\begin{aligned} v=\frac{\lambda}{2k}\Bigg[&\omega(y-kx)-\omega\left((1+k^2)\frac{y+kx}{1-k^2}\right)\Bigg] \\ &+\varphi\left(\frac{y+kx}{1-k^2}\right)-\frac{2(1-\lambda)}{2}\,\mathrm{Im}\left[f_3(z)-f_3\left(\frac{(-k+i)(y+kx)}{1-k^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

因之

$$\begin{aligned} v_1=\lim_{k\to 0}v&=\lim_{k\to 0}\frac{\lambda}{2}\,\frac{\omega(y-kx)-\omega\left((1+k^2)\dfrac{y+kx}{1-k^2}\right)}{k} \\ &\quad+\varphi(y)-\frac{2(1-\lambda)}{2}\,\mathrm{Im}\,[f_3(z)-f_3(iy)] \\ &=\frac{\lambda}{2}[-2x\omega'(y)]+\varphi(y)-(1-\lambda)\,\mathrm{Im}\,[f_3(z)-f_3(iy)]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

在(2.13)中令 $k\to 0$，即得

$$f_1(t)=-f_1(t)+\Psi(t)-2\mathrm{Re}[f_3(it)],$$

从而得出

$$\omega(t)=f_1(t)=\frac{\Psi(t)}{2}-\mathrm{Re}[f_3(it)],$$

$$\omega'(t)=\frac{\Psi'(t)}{2}-\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\chi(e^{i\tau})}{2}\left(it+2e^{i\tau}\ln\frac{e^{i\tau}-it}{e^{i\tau}}\right)d\tau+iC_1(it)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\Psi'(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(e^{i\tau})2\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[e^{i\tau}\ln(e^{i\tau}-it)\right]d\tau\right\}+C_1,\quad(2.23)$$

将(2.23)代入(2.22)我们得

$$v_1=-\frac{\lambda x}{2}\left\{\Psi'(y)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(e^{it})2\frac{d}{dy}\mathrm{Re}\left[e^{it}\ln(e^{it}-iy)\right]dt\right\}$$

$$+\varphi(y)-(1-\lambda)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(e^{it})\,\mathrm{Im}\left[e^{it}\ln\frac{e^{it}-z}{e^{it}-iy}\right]dt+(1-2\lambda)C_1x.$$

(2.24)

最后，对于第一类复合型方程组(C_1)我们有如下定理。

定理 3 假设在单位圆$|\zeta|=1$上给出连续函数$\chi(\zeta)$和在$[-1,1]$上给出连续函数$\Psi(y)$，$\varphi(y)$，而且$\Psi'''(y)$，$\varphi''(y)$在$[-1,1]$上存在，则第一类复合型方程组(C_1)存在解(2.21)，(2.24)满足条件(2.19)。除v_1相差一个任意一次项Cx之外，解是唯一的。

§3. 对顶点定理及其应用

复合型方程组(C_2)可分解成：

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0&-\frac{\lambda+k^2}{1-\lambda}\\ \frac{(1-\lambda)k^2}{\lambda+k^2}&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}0&\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda(1-\lambda)}\\ -\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+k^2}&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0.\qquad(3.1)$$

如果引入新函数

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}:=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0&\frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda(1-\lambda)}\\ -\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+k^2}&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\qquad(3.2)$$

则得

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0&-\frac{\lambda+k^2}{1-\lambda}\\ \frac{(1-\lambda)k^2}{\lambda+k^2}&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=0.\qquad(3.3)$$

显见，(3.3)实质上是具有特征二次型$(-\xi^2+k^2\eta^2)$的双曲方程组。所以，我们考虑了关于函数p，q的一些双曲特性。下面，我们把对顶点定理推广到函数p，q上去。

从一般解(C_2^*)，我们得出

$$\begin{cases} p=\alpha[f_1'(y-kx)-f_2'(y+kx)], \\ q=\beta[f_1'(y-kx)+f_2'(y+kx)], \end{cases} \tag{3.4}$$

这里$\alpha=\dfrac{\lambda(1+k^2)}{k(1-\lambda)}$，$\beta=-\dfrac{\lambda(1+k^2)}{\lambda+k^2}$。考虑如下四根特征线：$l_1: y-kx=c_1$，$l_2: y-kx=c_2$，$m_1: y+kx=d_1$，$m_2: y+kx=d_2$。假设它们的交点为$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$（图2），则有$A=(x_1, y_1)$，$B=(x_2, y_1+k(x_2-x_1))$，$C=(x_2-x_1+x_4, y_1+k(x_2-x_4))$，$D=(x_4, y_1+k(x_1-x_4))$。而且$c_1=y_1-kx_1$，$c_2=y_4-kx_4$，$d_1=y_1+kx_1$，$d_2=y_2+kx_2$。所以由式(3.4)我们有

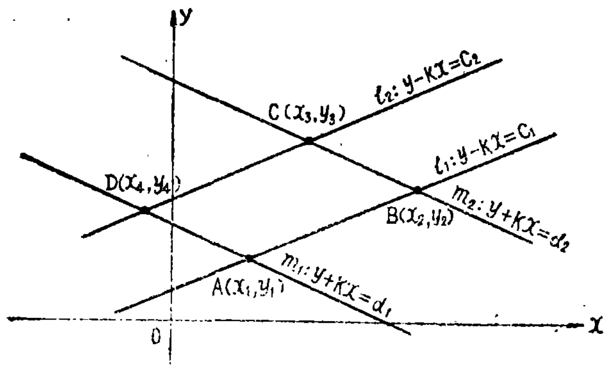

图 2

$$p(A)=\alpha[f_1'(c_1)-f_2'(d_1)],$$

$$p(B)=\alpha[f_1'(c_1)-f_2'(d_2)]$$

$$p(C)=\alpha[f_1'(c_2)-f_2'(d_2)],$$

$$p(D)=\alpha[f_1'(c_2)-f_2'(d_1)]$$

由此得出 $$p(A)+p(C)=p(B)+p(D). \tag{3.5}$$

用同样的方法不难证明

$$q(A)+q(C)=q(B)+q(D). \tag{3.6}$$

最后，我们有如下定理：

定理4（对顶点定理）。假设u，v是复合型组(C_2)的解，则对于任一特征平行四边形$ABCD$（图2），函数

$$\begin{cases} p(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{2(\lambda+k^2)}{\lambda(1-\lambda)}\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ q(x,y)=2\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+k^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

存在关系式(3.5)和(3.6)。

下面我们应用这个定理去解决(C_2)组的一个边值和特征问题。

Dirichlet-Goursat问题。假设$ABCD$是一特征平行四边形，它的顶点是$A(0,0)$ $B(\frac{1}{k},-1)$，$C(\frac{2}{k},0)$，$D(\frac{1}{k},1)$。(图3)。用

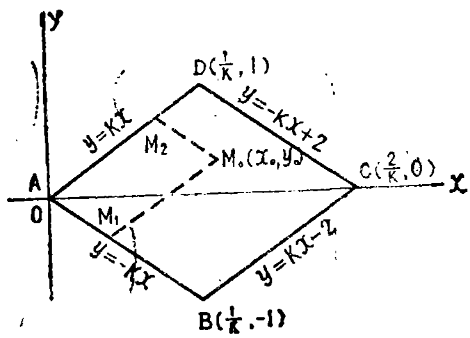

图 3

G表示$ABCD$所围成的内域，Γ表示G的边界（即特征平行四边形）。$\chi(\zeta)$是给定在Γ上的连续函数，$\Psi_1(x)$，$\Psi_2(x)$是在$[0,\frac{1}{k}]$上的一阶可微函数，且$\Psi_1(0)=\Psi_2(0)$。Dirichlet-Goursat 问题是在区域G内求(C_2)的解u，v使它们适合：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{2k^2}{\lambda}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{\Gamma}=\chi(\zeta), \quad \zeta\in\Gamma, & (3.7)\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{2(\lambda+k^2)}{\lambda(1-\lambda)}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{AD}=\Psi_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{k}, & (3.8)\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{2(\lambda+k^2)}{\lambda(1-\lambda)}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{AB}=\Psi_2(x), \quad 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{k}. & (3.9)\end{cases}$$

从式(2.6)和条件(3.7)我们有

$$\mathrm{Re}[f_3'(z)]\Big|_{\Gamma}=\frac{1}{2(1+k^2)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2k^2}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{\Gamma}=\frac{\chi(\zeta)}{2(1+k^2)}. \tag{3.10}$$

根据[5]（第十一章§.6）的引理，立得

$$f_3'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\chi(\zeta)\frac{\partial\ln T(\zeta,z)}{\partial n}ds+ic_1, \tag{3.11}$$

这里c_1是一任意实数，ds是边界Γ的微弧，$T(\zeta,z)$是单叶保角映射区域G为单位圆$|T|<1$的函数，并且适合$T(z,z)=0$，$T_z'(z,z)>0$。在(3.11)式中对z积分，得

$$f_3(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^z\int\chi(\zeta)\frac{\partial T(\zeta,z)}{\partial n}ds\,dz+ic_1z. \tag{3.12}$$

现在我们应用对顶点定理去求出函数f_1，f_2。假设$M_0(x_0,y_0)$是闭区域$\bar{G}$上任一点，对应于M_0，我们可作一特征平行四边形$AM_1M_0M_2$，它们的顶点是$A(0,0)$，$M_1\left(\frac{x_0}{2}-\frac{y_0}{2k},\frac{y_0}{2}-\frac{kx_0}{2}\right)$，$M_0(x_0,y_0)$，$M_2\left(\frac{x_0}{2}+\frac{y_0}{2k},\frac{y_0}{2}+\frac{kx_0}{2}\right)$。（图3）。由定理4的式(3.5)得

$$p(M_0)=p(M_1)+p(M_2)-p(A)$$

应用定解条件(3.8)，(3.9)，立得

$$p(x_0,y_0)=\Psi_1\left(\frac{y_0+kx_0}{2k}\right)+\Psi_2\left(-\frac{y_0-kx_0}{2k_0}\right)-\Psi_1(0), \tag{3.13}$$

同式(3.4)相比较，即得

$$\begin{cases}\alpha f_1'(y_0-kx_0)=\Psi_2\left(-\dfrac{y_0-kx_0}{2k_0}\right)+\alpha c_2-\Psi_1(0),\\ -\alpha f_2'(y_0+kx_0)=\Psi_1\left(\dfrac{y_0+kx_0}{2k}\right)-\alpha c_2\end{cases} \tag{3.14}$$

这里c_2是任意实常数。由(3.14)即得

$$
\begin{cases}
f_1(t) = -\dfrac{2k}{a}\displaystyle\int_0^{-\frac{t}{2k}}\Psi_2(\tau)d\tau + \left(c_2 - \dfrac{\Psi_1(0)}{a}\right)t + c_3, & -2\leqslant t\leqslant 0, \\
f_2(t) = -\dfrac{2k}{a}\displaystyle\int_0^{\frac{t}{k}}\Psi_1(\tau)d\tau + c_2 t + c_4 & 0\leqslant t\leqslant 2.
\end{cases} \tag{3.15}
$$

这里 c_3，c_4 是实常数。

将(3.12)，(3.15)代入一般解 (C_2^*)，得

$$
\begin{aligned}
u = & -\frac{2k^2(1-\lambda)}{\lambda(1+k^2)}\left[\int_0^{-\frac{y-kx}{2k}}\Psi_2(\tau)d\tau + \int_0^{\frac{y+kx}{2k}}\Psi_1(\tau)d\tau\right] \\
& + \frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}\frac{1}{2\pi}\int \chi(\zeta)\,\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{\partial \ln T(\zeta,z)}{\partial n}dz\right]ds \\
& + \left[\frac{k^2(1-\lambda)}{\lambda(1+k^2)}\Psi_1(0)x + \left(-\frac{k(1-\lambda)}{\lambda(1+k^2)}\Psi_1(0) - \frac{2(\lambda+k^2)}{\lambda}c_1 + 2c_2\right)y \right. \\
& \left. + (c_3+c_4)\right],
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
v = & -\frac{k(1-\lambda)}{1+k^2}\left[\int_0^{-\frac{y-kx}{2k}}\Psi_2(\tau)d\tau - \int_0^{\frac{y+kx}{2k}}\Psi_1(\tau)d\tau\right] \\
& - \frac{2(1-\lambda)}{2}\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \chi(\zeta)\,\mathrm{Im}\left[\int_0^z \frac{\partial \ln T(\zeta,z)}{\partial n}dz\right]ds \\
& - \left[(\lambda+(1-\lambda)c_1)x + \frac{1-\lambda}{2(1+k^2)}\Psi_1(0)y - \frac{\lambda(c_3-c_4)}{2k}\right].
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

归纳上述结果我们得

定理5 复合型偏微分方程组 (C_2) 在区域 G 内存在 Dirichlet-Goursat 问题的解(4.16) (4.17)。而且除去相差一个一次项之外，解是唯一的。

参 考 文 献

〔1〕 С. А. Габов, Г. Ю, Мальшева, А. Г. Свешников, "Об одном уравнении составного типа, связанном с колебаниями сжимаемой стратифицированной жидткости." Дифференц. Уравнения, 1983, Т. 19, №7, 1171—1180.

〔2〕 R. P. Gilbert and M. Schneider, *Journal of Approximation Theory*, 25 (1979), 2.

〔3〕 H. Begehr, Boundary value problem for mix kind systems of first order partial differential equations, The Ⅱ Romanian finish seminas on complex

analysis, Bucarest, 1976.
〔4〕 A. Dzuraev, Systems of Equations of Composite Type, Nauke, Moskva, 1972.
〔5〕 华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，北京，1979.

Some Problems for the Systems of Equations of Composite Type

Lin Wei *Wu Ciqian*

Abstract

In this paper, we first reduce the composite system of second kind to a new canonical form and introduce its general solution. On bases of these results, by letting $k\to 0$ (in this case two distinct real characteristics degenerate to a double real characteristics) and taking the limits, the canonical form and the general solution for the composite system of first kind are obtained. We also use the similar method to treat the first problem of the composite systems for the second kind and then for the first kind. In this paper the generalized opposite vertex theorem and its application are also provided.