

一般轴对称光学无源谐振腔横模性质的计算与参照光场的选择*

徐家进

(广州师院物理系)

李先枢

(中山大学物理学系)

摘 要

根据光学无源谐振腔的矩阵理论^[1,2],对一般轴对称光学无源谐振腔横模性质的计算公式作一总结,并指出参照光场的选择对于这一计算具有相当大的实际意义。计算实践表明,选择一个合适的参照光场可使计算的工作量大大减轻。最后还提出了选择合适的参照光场的一些经验规律。

我们曾应用李先枢提出的光学无源谐振腔的矩阵理论,计算了对称稳定腔^[3]、F-P腔和某些非对称的稳定腔^[4]。本文的目的是对一般轴对称无源腔横模性质的计算公式作一总结,使之适用于各种类型的无源腔(包括非稳腔),并指出参照光场的选择在这一计算中有着不可忽略的作用。但如何选择—个合适的参照光场,这是一个比较复杂的问题,目前还处于探索阶段。本文只是根据大量的计算实践提出几个行之有效的经验规律。

一、一般轴对称无源腔矩阵方程

图1表示一般轴对称无源腔,反透镜 M_1 、 M_2 的曲率半径分别为 r_1 和 r_2 ,两镜的半径分别为 a 和 b ,腔长为 d 。这样的谐振腔可与图2所示的透镜波导等价。 L_1 和 L_2 这两个半透镜的焦距 f_1 、 f_2 分别等于 r_1 和 r_2 ,半透镜间衍射开孔的半径分别为 a 和 b 。

设图2中面1和面3上的光场分布矢量分别为 \vec{X}_1 和 \vec{X}_3 ,据[1]有

$$\vec{X}_3 = A_{S1} \vec{X}_1 \quad (1-1)$$

其中 A_{S1} 为面1至面3的光传播矩阵,由如下三个矩阵组成:

本文于1985年6月收到

• 中国科学院科学基金资助的课题

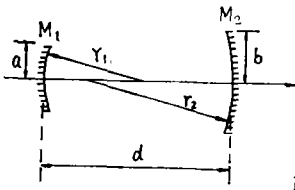


图1 一般无源谐振腔

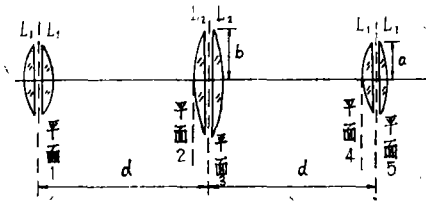


图2 等价透镜波导

$$A_{s1} = A_{t1} A_{L2} A_1 \tag{1-2}$$

其中 A_1 为面1至面2的衍射矩阵, A_{L2} 为面2到面3的薄透镜矩阵, A_{t1} 为使面3与面1参照光场一致的变换矩阵。

同样, 面5上的场分布矢量为

$$\vec{X}_5 = A_{s2} \vec{X}_3 \tag{1-3}$$

其中 A_{s2} 为面3到面5的光传播矩阵, 也由三个矩阵组成:

$$A_{s2} = A_{t2} A_{L1} A_2 \tag{1-4}$$

A_2 为面3到面4的衍射矩阵, A_{L1} 为面4到面5的薄透镜矩阵, A_{t2} 为使面5与面3(由于 A_{t1} , 故也是与面1)上的参照光场一致的变换矩阵。

由(1-1)、(1-3)得

$$\vec{X}_5 = A_{s2} A_{s1} \vec{X}_1 = A_s \vec{X}_1 \tag{1-5}$$

其中 $A_s = A_{s2} A_{s1}$ (1-6)

为整个谐振腔中往返一次的光传播矩阵。

如果 \vec{X}_1 是自洽的, 那么可令 $\vec{X}_5 = \gamma \vec{X}_1$, 代入(1-5)则可得一般轴对称无源谐振腔自洽场的矩阵方程。

$$A_s \vec{X} = \gamma \vec{X} \tag{1-7}$$

这儿已用 \vec{X} 代替了 \vec{X}_1 。

由(1)可分别写出各具体矩阵的表达式, 经简单的矩阵运算后得

$$\begin{aligned} \{A_s\}_{mn} &= \alpha_0 j^l \sqrt{\frac{n+l/2}{m+l/2}} \left(\frac{q_1'}{q_1}\right)^{n+l/2} \left(1 - \frac{q_1}{q_3}\right)^m \left(\frac{q_1}{q_{k1}}\right)^{l/2} \\ &\frac{\Gamma(m+l/2+1)}{\Gamma(n+l/2+1) \Gamma(m+l/2+1)} \int_0^{a^2/q_1'} t^{n+l} \left\{ \sum_{k=0}^m \binom{l+m}{m-k} \left[\frac{q_1}{q_{k1}} / \left(1 - \frac{q_1}{q_3}\right) \right]^k \right\} \\ &\cdot L_k^{(l)}(t) e^{-t} dt \end{aligned} \tag{1-8}$$

其中 q_i 为面 i ($i=1, 2, 3$)上参照高斯光束场复光斑半径。

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{w_i^2} + j \frac{k}{2R_i}, \quad i=1, 2, 3. \tag{1-9}$$

而

$$\frac{1}{q_1'} = \frac{1}{W_1^2} + \frac{j}{2} k \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d} \right), \tag{1-10}$$

$$\frac{1}{q_{k1}} = \frac{1}{W^2} \left[1 - j \left(\frac{R_2 - d}{R_2} \right) \frac{k\omega_2^2}{2d} \right] \quad (1-11)$$

注意到有关拉盖尔函数的恒等式^[5]

$$\sum_{n=0}^m \binom{l+m}{n} \mu^n \left(\frac{1-\mu}{\mu} \right)^n L_{m-n}^{(l)}(x) = L_m^{(l)}(\mu x), \quad (1-12)$$

于是(1-8)可变成

$$\left\{ A_{s1} \right\}_{mn} = a_0 j^c \sqrt{\frac{n+l/2}{m+l/2}} a_3^{l/2} \frac{a_1^{n+l/2} a_0^m \Gamma(m+l/2+1)}{\Gamma(n+l/2+1) \cdot \Gamma(m+l+1)} \cdot \int_0^{a_1} t^{n+l} L_m^{(l)}(a_3 t) e^{-t} dt, \quad (1-13)$$

其中

$$a_0 = \text{常数}, \quad (1-14)$$

与变换参照光场有关。其余参数为

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{q_1'}{q_1} = |a_1| e^{i\alpha_1}, \\ a_2 &= 1 - \frac{a_3}{q_3} = |a_2| e^{i\alpha_2}, & a_3 &= \frac{q_1}{q_{k1}} = |a_3| e^{i\alpha_3}, \\ a_4 &= \frac{a_2^2}{q_1'} = |a_4| e^{i\alpha_4}, & a_5 &= \frac{a_3}{a_2 + a_3} = |a_5| e^{i\alpha_5}, \\ a_6 &= a_2 + a_3 = |a_6| e^{i\alpha_6} \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

把(1-13)式积分出来, 得

$$\left\{ A_{s1} \right\}_{mn} = |a_0| \cdot |a_1 a_2|^{l/2} \sqrt{\frac{n+l/2}{m+l/2}} \frac{\Gamma(m+l/2+1)}{|1/a_0|^m} \cdot \frac{|a_1|^n}{\Gamma(n+l/2+1)} \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \frac{(l+n+\nu)! |a_5|^\nu}{(l+\nu)! (m-\nu)! \nu!} e^{i\theta_1} \left[1 - e^{-|a_4| \cos \alpha_4} \sum_{s=0}^{l+n+\nu} \frac{|a_4|^s e^{i\theta_2}}{S!} \right]. \quad (1-16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \pi)l/2 + n\alpha_1 + \nu\alpha_5 + m\alpha_6, \\ \theta_2 &= S\alpha_4 - |a_4| \sin \alpha_4. \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

用类似方法求出 $\left\{ A_{s2} \right\}_{mn}$, 从而由(1-6)式可求出 $\left\{ A_s \right\}_{mn}$.

二、横模特性的计算

由[1,2]知, 可将无穷阶矩阵 A_s 截取为 $N+1$ 阶方阵, 于是(1-7)式成为

$$\gamma_N \vec{X}_N = A_{sN} \vec{X}_N \quad (2-1)$$

上述矩阵方程可用计算机求解，每一个特征矢量就相应一个自治场（横模），由此可算出各横模的特性。

1. 衍射损耗

$$L_m = 1 - |\gamma_{lm}|^2 \quad (2-2)$$

2. 该横模相移

$$A_m = \frac{1}{2} \arg \gamma_{lm} \quad (2-3)$$

3. 场分布。据[6]，面1上场分布为

$$u_{p1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{pn}^{(1)} \frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{\Gamma(n+1/2+1)} \left(\frac{\xi^2}{2}\right)^{n+1/2} u(\xi^2, z) e^{il\phi} \quad (2-4)$$

其中 $\xi^2 = \rho/q_1$, (2-5)

$$\Phi = \tan^{-1} \left(\frac{k w_1^2}{2R_1} \right) \quad (2-6)$$

$$u_c(\xi^2, z) = E_0 \frac{W_0}{W} \exp[-j(kz - \Phi) - \varepsilon^2/2] \quad (2-7)$$

而 α'_{pn} 为与 γ_{lp} 相应的本征矢的第 $p+1$ 个分量，

$$\left. \begin{aligned} r &= \rho/a, \\ \tilde{N}_1 &= a^2/\lambda d. \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

并用下一节的(3-1)、(3-2)、(3-3)式，由(2-4)得

$$u_{p1} = E'_1 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha'_{pn} \frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{\Gamma(n+1/2+1)} (Mr^2)^{n+1/2} e^{i\theta_3} \right\} e^{-Mr^2 \cos \phi} \quad (2-9)$$

其中
$$\left. \begin{aligned} E'_0 &= E_0 \frac{W_0}{W} \exp[-j(kz - \phi)] e^{il\phi}, \\ \theta_3 &= (n+1/2)\phi - Mr^2 \sin \phi, \\ M &= \tilde{N}_1 \pi \sqrt{1 + \alpha^2 A^2} / A. \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

α 、 A 为所选参照光场参数，见(3-2)、(3-3)。将(2-9)的实部与虚部分开，得

$$\begin{aligned} \text{Re}\{u_{p1}(r)\} &= \exp(-Mr^2 \cos \phi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{\Gamma(n+1/2+1)} (Mr^2)^{n+1/2} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\text{Re}\left\{ \alpha'_{pn} \right\} \cdot \cos \theta_3 - \text{Im}\left\{ \alpha'_{pn} \right\} \cdot \sin \theta_3 \right] \end{aligned} \quad (2-11)$$

$$\text{Im}\{u_{p1}(r)\} = \exp(-Mr^2 \cos \phi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{\Gamma(n+1/2+1)} (Mr^2)^{n+1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\operatorname{Re} \left\{ \alpha_{pn}^{(1)} \right\} \cdot \sin \theta_3 + \operatorname{Im} \left\{ \alpha_{pn}^{(1)} \right\} \cdot \cos \theta_3 \right]. \quad (2-12)$$

这儿已忽略掉与 r 无关的 E_0' 。于是该模的相对实振幅分布为

$$I(r) = \left[\operatorname{Re} \{ u_{p1}(r) \} \right]^2 + \left[\operatorname{Im} \{ u_{p1}(r) \} \right]^2 / |f_{p1}|. \quad (2-13)$$

其中 $|f_{p1}|$ 为归一化常数

$$|f_{p1}| = \left| \left[\operatorname{Re} \{ u_{p1}(r) \} \right]^2 + \left[\operatorname{Im} \{ u_{p1}(r) \} \right]^2 \right|_{\max}^{1/2}. \quad (2-14)$$

而该横模的相对位相径向分布为

$$\Theta(n) = \tan^{-1} \left[\operatorname{Im} \{ u_{p1}(r) \} / \operatorname{Re} \{ u_{p1}(r) \} \right]. \quad (2-15)$$

面3上的场分布, 可以仿上由下式求得

$$\vec{X}_{p2} = A_{s1} \vec{X}_{p1} \quad (2-16)$$

其中 \vec{X}_{p1} 为(2-1)式的第 $P+1$ 个特征矢(与 γ_{1p} 相应), \vec{X}_{p2} 为该横模在面2上的场分布矢量。

三、参照光场的选择与矩元各参数的具体表示式

对于各种非涅耳数 \tilde{N} 不同的腔, 应选择多大的 N 才适合, 在[2]中已给出了一个严格的上限。但这个上限往往偏大, 而且由于 N 选得过大, 无论是计算矩元还是解特征方程都需相当长的时间(粗略地讲, 计算时间至少是与 N^2 成正比的)。更重要的是, 由于 N 过大可能导致较大的计算误差, 甚至导致计算失败。而适当地选择参照高斯光场可以增加自治场方程(1-7)的收敛速度, 减少(2-1)中矩阵方程的阶数, 从而大大缩短计算时间, 提高计算精度, 这显然是十分重要的。

从数学上看, 选择合适的参照光场实质上就是选择函数空间的函数基使之适宜于描述一定的场分布, 因此对于不同的腔选择不同的参照光场是自然的, 因为它们的场分布函数性质并不相同。

为使参照光场便于选择, 我们引入如下二个可调参量 α 与 A , 其意义如下: 根据(1-9), 面1上的参照高斯光场的复光斑半径为

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{W_1^2} + j \frac{k}{2R_1} \quad (3-1)$$

$$\text{令 } \alpha = d/R_1, \quad (3-2)$$

$$A = kw_1^2/2d, \quad (3-3)$$

即 α 确定参照光场等相面(轴附近)曲率半径, A 确定光斑半径 W_1 。计算中给出 α 、 A , 便给出了一种一定的参照光场选择。于是由(3-1)

$$\frac{1}{q_1} = (1 + j\alpha A)/W_1^2, \quad (3-4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{令} \quad \frac{1}{R'} &= \frac{1}{R} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}, \\ \text{则} \quad \frac{1}{R'} &= (\alpha + g_1 - 1)/d. \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

其中 $g = 1 - d/r_1$. (3-6)

于是由 (1-10) 得

$$\frac{1}{q_1'} = [1 + jA(\alpha + g_1)]/w_1^2. \quad (3-7)$$

注意到 $W_1^2 = W_1'^2$, 以及 $W_1'^2 = W_0'^2 \left[1 + \left(kw_1'^2 / 2R_1' \right)^2 \right]$, 和 $kW_0'^2 / 2z_{01}' = 2R_1' / kw_1'^2$, 即

可得光腰位置 z_{01}' 为

$$z_{01}' = A^2(\alpha + g_1 - 1)d / [1 + A^2(\alpha + g_1 - 1)^2], \quad (3-8)$$

又因 $w_2^2 = w_0'^2 \left\{ 1 + \left[2(d + z_{01}') / kw_0'^2 \right]^2 \right\}$,

令 $w_2^2 = Mw_1^2$, (3-9)

得 $M = \frac{1}{A^2} + (g_1 + \alpha)^2$. (3-10)

利用 $2R_2/kw_2^2 = kw_0'^2 / 2(d + z_{01}')$ 得

$$R_2 = Qd \quad (3-11)$$

$$Q = A^2M / [1 + A^2(g_1 + \alpha)(g_1 + \alpha - 1)]. \quad (3-12)$$

又据 (1-11) 得

$$\frac{1}{q_{k1}} = (M_1 - jAQ_2) / W_1^2, \quad (3-13)$$

其中 $M_1 = \frac{1}{M}, \quad Q_1 = \frac{1}{Q},$ (3-14)

$$Q_2 = 1 - \frac{1}{Q} = 1 - Q_1$$

因 $\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{f_1}$, 得

$$R_3 = Q_3d, \quad (3-15)$$

$$g_2 = 1 - d/r_2, \quad (3-16)$$

$$Q_3 = 1 / [Q_1 - (1 - g_2)] = 1 / (g_2 - Q_2) = \frac{1}{Q_4} \quad (3-17)$$

而据 (1-10), 取 $i = 2$ 得

$$\frac{1}{q_2} = (M_1 + jAQ_1) / w_1^2, \quad (3-18)$$

在(1—10)中取 $i=3$, 并注意到 $\omega_3^2 = \omega_2^2$, 可得

$$\frac{1}{q_3} = \frac{1}{\omega_1^2} (M_1 + jAQ_4). \quad (3-19)$$

将上面各式分别代入(1—15)则可得

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= [1 + \alpha A^2(\alpha + g_1) - jAg_1] / [1 + A^2(\alpha + g_1)^2] \\ a_2 &= [1 - M_1 + \alpha A^2(\alpha - Q_4) + jA(\alpha M_1 - Q_4)] / [1 + \alpha^2 A^2] \\ a_3 &= [M_1 - A^2\alpha Q_2 - jA(\alpha M_1 + Q_2)] / (1 + \alpha^2 A^2) \\ a_4 &= [1 + jA(\alpha + g_1)\tilde{N}_1\pi] / A \\ a_5 &= \{M_1 - A^2Q_2(\alpha - g_2) - jA[M_1(\alpha - g_2) + Q_2]\} \cdot \\ &\quad \cdot 1 / [1 + A^2(\alpha - g_2)^2] \\ a_6 &= [1 + \alpha A^2(\alpha - g_2) - jAg_2] / (1 + \alpha^2 A^2) \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

这儿 \tilde{N}_1 如(2—8)所定义, 即为面1上的菲涅耳数。

如果我们选择好适当的 α 、 A , 并根据给定的 l , g_1 , g_2 和 \tilde{N}_1 便可按(3—20)算出各参数, 进而根据截取的阶数 N 算出 A_{s1} 的各矩元。至于 A_{s2} 的矩元, 不难看出只需将上述各参数中的 g_1 与 g_2 互换, 并将 \tilde{N}_1 换成 \tilde{N}_2 就行了。然后由矩阵乘法求出 A_s 的各个矩元, 便可求解矩阵特征方程(2—1)。如果 N 选得合适, 便可求出相应于各阶横模的特征值与特征矢。再按(2—2)、(2—3)、(2—13)、(2—15)可算出各横模的特性。

四、参照光场选择的经验规律

前面已经指出, 合理地选择参照光场是十分重要的。那么如何才能选得合理, 使矩元收敛快, 进而使必须截取的阶数 N 较少呢? 我们在大量的(各种对称的与非对称的、稳定与非稳定腔)计算的实践中摸索到如下一些规律:

1. 参数 α 在选择参照光场中起主导作用, 即参照光场等相面的曲率半径的选择比光斑半径的选择重要得多。

2. 在对称腔中取 $\alpha = g_1 = g_2$ 较为适宜, 特别是在大菲涅耳数时, 效果更为显著。进一步分析表明, 这样取的结果是使(1—13')积分号中的拉盖耳函数值为实数, 这对于减少计算误差无疑是有益的。

3. α 取定后, \tilde{N} 较大时取 A 为1较宜。

据上述经验对一般无源腔作了系列计算, 获得了成功(待发表)。

参 考 文 献

- [1] 李先枢, 物理学报, 30(1981), 1325.
[2] 李先枢, 物理学报, 32(1983), 990.
[3] 李先枢等, 物理学报, 32(1983), 1002.
[4] 邝赞枢等, 全国应用激光联刊, 1984, 12.
[5] G. Sansone, Orthogonal Functions, INC, New York, 1059.
[6] 李先枢, 物理学报, 30(1981), 503.

Calculation of Transverse Modes for General Axial-Symmetric Passive Resonators and Choice of Reference Light Field

Xu Jiajing

(Guangzhou Teacher's College)

Li Xianshu

(Zhongshan University)

Abstract

Formulas of the calculation for all modes (including high order modes) of general axial symmetric passive resonators according to the matrix theory for optical passive resonators proposed by Li Xianshu^(1,2) is summarized. It shows that the choice of reference light field is a great importance in practice. Choosing a suitable reference light field will make the calculation faster. At the end it presents some experiential rules for the choice of reference light field.