固定目标值分离加项阻尼最小二乘法*

王 大 麒**

（数学系）

摘　要

本文提供一个解非线性不等式组（1.1）的固定目标值迭代方法族．这个族中的每个迭代方法不但能使在迭代点的函数值收敛到锁向精度后不再超出精度区间和使未收敛到锁向精度的函数有较快的速度向精度区间收敛．而且还有多种自动调节功能．

本文提供一个不等式组(1.1)数值解的固定目标值迭代方法族．这个方法族中的每个迭代方法均同时具有下面五个自动调节特性：

1．当(1.2)中的每个函数在迭代点的值收敛到锁向精度后不再超出精度区间，而未收敛到锁向精度者有较快速度向精度区间收敛；

2．对函数$\varphi_k(x)$和在迭代点$x^{(k)}$收敛到锁向精度的函数值组$\{|F_i(x^{(k+1)})||i\in I_k\}$能按我们事先给定的各种规律自动调节；

3．对函数$\overline{\varphi}_k(x)$和在迭代点$x^{(k)}$未收敛到锁向精度的函数值组$\{|F_i(x^{(k+1)})||i\in\overline{I}_k\}$也能按我们事先给定的各种规律自动调节；

4．对(1.1)中函数值$f_i(x^{(k+1)})(i\in I_2^*)$有良好的单边调节特性；

5．还有$q_j^{(k)}$权的各种自动调节特性．

本文涉及的算法族是文〔7〕论述的算法族限制在固定目标值情形的子族．但本文的算法不仅是文〔7〕的具体化，而且在某些方面作了如下的新发展：

1)在文〔7〕的一般变动目标值情形中，上述的特性2—4一般是通过无限次逼近要求来实现的．而本文是固定目标值，只有一个固定要求．这样，在计算机的有限次计算结果中，本文的特性2—4比文〔7〕的好．

2)本文采用较适合于固定目标值情形的特殊分类§2中1°，它将促使固定目标值的锁向迭代顺利进行．

本文1984年1月收到

* 本文是作者1976—1977年在中大最优化小组中的讲演稿的基础上整理而成的．其特殊情形已收入在作者的讲义《光学镜头自动设计数学方法》（一）、（二）中（1976.7—1977.9，广州）．

** 林康有、庞道初和汤爱珍等参加本方法的程序设计、程序试验和应用工作．

3)本文对 $q_j^{(k)}$ 权采用§2中3°的特殊限制。既大大节约计算量，又突出 $q_j^{(k)}$ 权的常用控制特性。

4)本文把§5定理3中的单向锁向快速下降权集从文〔7〕的E*扩大到E**。

本文采用文〔7〕的定义和符号。

§1 求解问题

求不等式组

$$\begin{cases} a_i\leqslant f_i(x)\leqslant b_i & (i\in I_1^*), \\ a_i\leqslant f_i(x) & (i\in I_2^*), \end{cases} \tag{1.1}$$

的数值解，是本文的求解问题，其中 $x\in D\subset R^n$ (n维欧氏空间)，$I=I_1^*\cup I_2^*=\{1,2,\cdots,m\}$, $f_i(x)(i\in I)$是D上的实函数。

我们对 $i\in I_2^*$，取b_i是大于a_i的足够大的实数，称 $f_i^*=2^{-1}(a_i+b_i)$ $(i\in I)$为固定目标值，$\varepsilon_i=2^{-1}(b_i-a_i)$ $(i\in I)$ 为固定精度，$F_i(x)=f_i(x)-f_i^*(i\in I)$为固定偏差函数。这样，问题

$$-\varepsilon_i\leqslant F_i(x)\leqslant\varepsilon_i \quad (i\in I) \tag{1.2}$$

的解集$D^*(a_i\leqslant f_i\leqslant b_i,\ i\in I_2^*)$是问题(1.1)的解集$D^*$的子集。但当 $b_i=b_i^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty(i\in I_2^*)$ 时，有

$$D^*=\lim_{n\to\infty}D^*(a_i\leqslant f_i\leqslant b_i^{(n)},\ i\in I_2^*). \tag{1.3}$$

因此，对于有限位数的计算机来说，我们可用求(1.2)的解来代替求(1.1)的解。

§2 算法模型

文〔7〕的算法模型限制在固定目标值情形就是本文的算法模型。但固定目标值有它自身的特殊性，且问题(1.2)是问题(1.1)转化而来的，故可针对这种具体情况采用更有效的措施来加强算法的功能。

1°采用有利于固定目标值情形的分离分类法

在迭代点$x^{(k)}$采用特殊的分离分类法：

$$\left.\begin{aligned} &I_k=I_{k-1}\cup\{i\,|\,i\in\bar{I}_{k-1},|F_i(x^{(k)})|<\alpha_{ki}\varepsilon_i\}, \\ &\bar{I}_k=I-I_k, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中$k=0,1,2,\cdots,I_{-1}=\phi$(空集)，由§5定理3和文〔7〕定理5.1.要求$\alpha_{ki}\in(0,1]$且满足条件

$$\sum_{i\in I_k-I_{k-1}}\varepsilon_i^{-2}F_i^2(x^{(k)})<\beta_k-\sum_{i\in I_{k-1}}\varepsilon_i^{-2}F_i^2(x^{(k)}), \tag{2.2}$$

其中$\beta_k=\beta(|I_k|)$，$|I_k|$为I_k中标号个数，$\beta(i)$是I上的严格单调增函数，且$\beta(m)=1$.因

此，I上的每个这样的严格单调增函数对应一个算法；从而I上这样的严格单调增函数族对应一个算法族。

2°固定目标值情形的特殊表示

$$\phi_k(x)=\overline{\varphi_k}(x)+R\varphi_k(x),\tag{2.3}$$

其中

$$\overline{\varphi_k}(x)=\sum_{i\in\overline{I}_k}w_i^{(k)}F_i^2(x),\tag{2.4}$$

$$\varphi_k(x)=\sum_{i\in I_k}\mu_i^{(k)}\varepsilon_i^{-2}F_i^2(x).\tag{2.5}$$

$$\phi_k(x)=\sum_{i\in\overline{I}_k}w_i^{(k)}\tilde{F}_i^2(x)+R\sum_{i\in I_k}\mu_i^{(k)}\varepsilon_i^{-2}\tilde{F}_i^2(x)+s\sum_{j=1}^{n}q_j^{(k)}(x_j-x_j^{(k)})^2.\tag{2.6}$$

3° 对 $q_j^{(k)}$权采用特殊限制

在文[7]中的$q_j^{(k)}$权性质相当广泛，一般要在$n+2$维空间中搜索单向锁向快速下降权集E^*.但对一般问题，$q_j^{(k)}$权具有某些控制特性已经够用。本文取$q_j^{(k)}$ $(j=1,2,\cdots,n)$为具有给定特性的正常数，或作连续变换

$$q_j^{(k)}=q_j^{(k)}(R)\qquad(j=1,2,\cdots,n).\tag{2.7}$$

这种处理，使得§5定理3中单向锁向快速下降权集$E^{**}_{(\varepsilon)}$变为二维空间中的子集。

4° 对$f_i(i\in I_2^*)$采用特殊控制

由于(1.2)是(1.1)转化而来的，而(1.1)中单边不等式只要求x满足$a_i\leqslant f_i(x)$ $(i\in I_2^*)$,故只须采用§3(二)3°控制。

§3 各种特性实现

前述的五种特性均用权控制实现

(一)特性1实现

由§5定理3知若权$(R,S)\in E^{**}_{(\varepsilon)}$和权$\mu_i^{(k)}$ $(i\in I_k)$满足(5.1)，则具有该定理①中指出的单向锁向调节特性和②中指出的较高敛速，且§5定理1又指出$E^{**}_{(\varepsilon)}$中的点可用一般搜索法找到。即特性1是可以实现的。

(二)特性1,2,3,4和5同时实现

1. 若要求 $\varphi_k(x)$ 和 $\{|F_i(x^{(k+1)})| \mid i\in I_k\}$ 具有调节特性

$$\eta=(\eta_i)\ (i\in I_k), \tag{3.1}$$

令

$$\mu=(\mu_i)\ (\mu_i>0(i\in I_k) \text{为(5.18)所表}). \tag{3.2}$$

取

$$\mu^{(k)}=[\mu]^{j_1(\mu)}\ (\text{或}[\mu]_{j_2(\mu)}). \tag{3.3}$$

设 $\mu^{(k)}$ 的特性因子为

$$\eta^{(k)}=(\eta_i^{(k)})\ (i\in I_k). \tag{3.4}$$

2. 若要求 $\overline{\varphi}_k(x)$ 和 $\{|F_i(x^{(k+1)})| \mid i\in\overline{I}_k\}$ 具有调节特性

$$v^{(k)}=(v_i^{(k)})\ (v_i^{(k)}\geqslant 0(i\in\overline{I}_k)). \tag{3.5}$$

取

$$w^{(k)}=(w_i^{(k)})\ (w_i^{(k)}\geqslant 0(i\in\overline{I}_k) \text{为[6]中(2.7)所表}). \tag{3.6}$$

3. 若要求 $f_i(x^{(k+1)})\ (i\in I_2^*)$ 具有单边控制特性，就在1和2中分别取特性因子

$$\eta_i=\eta(1-\varepsilon_i^{-1}|F_i(x^{(k)})|)\ (i\in I_2^*\cap I_k, \text{看[7]中(5.34)}) \tag{3.7}$$

和

$$v_i^{(k)}=[\varepsilon_i^{-1}|F_i(x^{(k)})|]^{a}\ (i\in I_2^*\cap\overline{I}_k, \text{看[6]中(2.12)}). \tag{3.8}$$

4. 若要求 $\sum_{j=1}^{n} q_j^{(k)}(x_j-x_j^{(k)})^2$ 和 $\{x_j^{(k+1)}-x_j^{(k)} \mid j=1,2,\cdots,n\}$ 具有调节特性

$$\Delta x^{(k)}=(\Delta x_j^{(k)})\ (j=1,2,\cdots,n, \text{看[6]中(2.16)}), \tag{3.9}$$

取

$$q^{(k)}=(q_j^{(k)})\ (q_j^{(k)}(j=1,2,\cdots,n) \text{为[6]中(2.18)所表}). \tag{3.10}$$

5. 取 $(R,S)\in E_{(\varepsilon)}^{**}$　(看(5.14)).　　(3.11)

在(3.3),(3.6),(3.7),(3.8),(3.10)和(3.11)的选取下，由§5，[7]和[6]知具有§5定理3中①和②的调节特性，而且还有① $\varphi_k(x)$ 和 $\{|F_i(x^{(k+1)})| \mid i\in I_k\}$ 具有调节特性(3.4)，且(3.4)是截断向量法中调节特性与我们所要求的调节特性(3.1)最逼近的调节特性；② $\overline{\varphi}_k(x)$ 和 $\{|F_i(x^{(k+1)})| \mid i\in\overline{I}_k\}$ 具有调节特性(3.5)；③ $f_i(x^{(k+1)})(i\in I_2^*)$ 具有调节特性(3.7)和(3.8)；④ $\sum_{j=1}^{n} q_j^{(k)}(x_j-x_j^{(k)})^2$ 和 $\{x_j^{(k+1)}-x_j^{(k)} \mid j=1,2,\cdots,n\}$ 具有调节特性(3.9)，换句话说，前言中的特性1、2、3、4和5同时实现了。

§4　在光学自动设计中的应用

光学镜头设计的任务就是找出一组匹配恰当的结构参数，使成象质量最优。每个镜头成象质量优劣以球差、彗差、场曲、象散、畸变和色差等，作为衡量标准，统称象

差；不同性能的镜头，有不同的象差值。而各种象差都被结构差数唯一确定。因此，可设结构参数

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{4.1}$$

为自变量，x的存在域D为n维欧氏空间R^n中的子集，而m个象差均为D上的函数

$$f_i(x)\ (i=1,2,\cdots,m).$$

置
$$y=f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)) \tag{4.2}$$

为D到m维线性赋范空间E^m中的算子；每个$x\epsilon D$表一个光学系统，$f(x)$表x的质量。称D为光学参数集，E^m为象差空间，f为光学成象质量算子。这样，光学设计问题数学上可叙述为求质量为

$$y^*=(f_1^*,f_2^*,\cdots,f_m^*) \tag{4.3}$$

的非线性成象质量算子方程

$$f(x)=y^* \tag{4.4}$$

的解。在实际设计中，对每个目标象差$f_i^*(i=1,2,\cdots,m)$都给出求解精度$\varepsilon_i>0\ (i=1,2,\cdots,m)$。因此，若令

$$F_i(x)=f_i(x)-f_i^*\quad(i=1,2,\cdots,m). \tag{4.5}$$

则光学自动设计问题就转化为求问题(1.2)的数值解问题。

下面是1977年我们用$\mu_i^{(k)}=1(i\epsilon I_k,k=0,1,2,\cdots)$的“固定目标值分离加项阻尼最小二乘法”(简称分离法)与“固定目标值阻尼最小二乘法”（简称阻尼法）联合（简称联合法）解方程(4.5)设计出来的四片放大机镜头，用15个象差衡量其质量，另加6个边界条件，共21个。我们分别用联合法和阻尼法在121机上计算25分钟作比较，结果列表于后。表1是计算过程，表2是最好结果。

表1说明：①阻尼法在第3次迭代以后出现跳动现象，无法获得更加精确的结果；②分离法只进行3次迭代就把满足精度要求的个数从14个单调递增至19个，未满足的二个也接近满足，说明分离法有良好的单向锁向调节特性和较高敛速，且边界条件全部得到控制；③分离法每次迭代时间较长，要与一般迭代法联合使用才能充分利用它的优点。

表1　迭代过程

迭代次数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
满足精度个数	阻尼法	13	15	15	13	14	14	15	12	13	13	13	14	13	14
	联合法	13	15	15	13	14	14	15	17	19					
		用阻尼法计算						用分离法计算							

表2 象 差

i	f_i^*	ε_i	结果 $f_i(x^*)$ 阻尼法	联合法	i	f_i^*	ε_i	结果 $f_i(x^*)$ 阻尼法	联合法
1	80	1	80.25	80.04	9	0.2	0.05	0.205	0.202
2	73.5	1	72.76	74.417	10	0	0.05	−0.342	−0.0124
3	0.11	0.1	0.105	0.106	11	0	0.015	−0.00105	0.00658
4	−0.1	0.05	0.566	−0.141	12	0	0.002	−0.000445	0.000066
5	−0.12	0.03	0.568	0.225	13	0	0.01	−0.0112	0.00777
6	0	0.0025	0.0000035	−0.00202	14	0	0.2	0.0658	0.14
7	−0.3	0.05	−0.442	−0.326	15	0	0.2	0.168	0.14
8	0.7	0.05	0.44	0.78					

§5 主 要 定 理

这一节将列出前面用到的主要定理，详细证明略。

定理1 设$f_i(x)(i\in I)$在$D(\subset R^n)$上连续，在D中有一阶连续偏导数，$x^{(k)}$是D的内点，矩阵$B=[sQ+A^TWA]$所对应的行列式为$|B|$，A、A^T、W和Q为[7] § 2所表，I、I_k、$\overline{I}_k$、β_k、$\phi_k(x)$、$\phi_k(x)$、$\varphi_k(x)$、$\overline{\varphi_k}(x)$、$w_i^{(k)}\geqslant 0(i\in\overline{I}_k,w_i^{(k)}$不全为0)、$\mu_i^{(k)}>0$ $(i\in I_k)$和$q_j^{(k)}>0$ $(j=1,2,\cdots,n)$为§2所表，$\mu_k=\min\limits_{i\in I_k}\mu_i^{(k)}$，$M_k=\beta_k\mu_k$，$\widetilde{\phi}_k(x)$是$\phi_k(x)$在点$x^{(k)}$的台劳展开的线性部分，$\|\mathrm{grad}\phi_k(x^{(k)})\|\geqslant\varepsilon_0>0$（$\|\cdot\|$为欧氏范数），

$$\varphi_k(x^{(k)})<M_k, \tag{5.1}$$

$$\theta_k(x)=[\phi_k(x)-\widetilde{\phi}_k(x)][\phi_k(x^{(k)})-\widetilde{\phi}_k(x)]^{-1}, \tag{5.2}$$

$$E_1=\{u|u=(R,S),R,S\in[0,\infty)\},$$

$$E_0=\{u|u\in E_1,|B|=0\},$$

$\phi_k(x)$的最小值点$x_{(u)}^{(k+1)}(u\in E_1-E_0)$，$\Delta x(u)=x_{(u)}^{(k+1)}-x^{(k)}(u\in E_1-E_0)$，$x_{(E_1-E_0)}^{(k+1)}\subset D$，

$$\text{开区间}\Delta_t=(tM_k+(1-t)\varphi_k(x^{(k)}),M_k)\ (t\in(0,1)), \tag{5.3}$$

$$\text{区间}\ \Delta_t^*=[tM_k+(1-t)\varphi_k(x^{(k)}),M_k)(t\in(0,1)), \tag{5.4}$$

$$\Delta_\theta=(-\infty,\theta_-)\cup(\theta_0,\theta^0)(-\infty<\theta_-<0<\theta_0<\theta^0<1). \tag{5.5}$$

$$\Delta_\theta^*=(-\infty,\theta_-]\cup[\theta_0,\theta^0](-\infty<\theta_-<0<\theta_0<\theta^0<1), \tag{5.6}$$

$$R_0=\overline{\varphi_k}(x^{(k)})[M_k-\varphi_k(x^{(k)})]^{-1}. \tag{5.7}$$

$$R_1=\inf\{R|\ u\in E_1-E_0,\varphi_k(x_{(u)}^{(k+1)})<M_k,\theta_k(x_{(u)}^{(k+1)})\in\Delta_\theta\}, \tag{5.8}$$

$$E_{M_k}=\{u|u\in E_1-E_0,\varphi_k(x_{(u)}^{(k+1)})<M_k\},$$

$$E_t=\{u|u\in E_1-E_0,\varphi_k(x_{(u)}^{(k+1)})\in\Delta_t\}\ (t\in(0,1)),$$

$$E_t^*=\{u|u\in E_1-E_0,\varphi_k(x_{(u)}^{(k+1)})\in\Delta_t^*\}\ (t\in(0,1)),$$

$$E_\theta=\{u|u\in E_1-E_0,\theta_k(x_{(u)}^{(k+1)})\in\Delta_\theta\},$$

$$E_\theta^*=\{u|u\in E_1-E_0,\theta_k(x_{(u)}^{(k+1)})\in\Delta_\theta^*\},$$

$$E_1(R=0)=\{u|u\in E_1,R=0\},$$

$$E_1(R_1<R<R_1+\varepsilon)=\{u|u\in E_1,\ R_1<R<R_1+\varepsilon\},$$

$$E_1(R_1\leqslant R\leqslant R_1+\varepsilon)=\{u|u\in E_1,\ R_1\leqslant R\leqslant R_1+\varepsilon\},$$

$$E_{t,\theta,\varepsilon}=E_t\cap E_\theta\cap E_1(R_1<R<R_1+\varepsilon),\tag{5.9}$$

$$E_{t,\theta,\varepsilon}^*=E_t^*\cap E_\theta^*\cap E_1(R_1\leqslant R\leqslant R_1+\varepsilon),\tag{5.10}$$

$$E_{M_k,\theta,0}=E_{M_k}\cap E_\theta\cap E_1(R=0),\tag{5.11}$$

$$E_{M_k,\theta,0}^*=E_{M_k}\cap E_\theta^*\cap E_1(R=0),\tag{5.12}$$

$$E_{(\varepsilon)}^*=E_{M_k,\theta,0}\cup E_{t,\theta,\varepsilon},\tag{5.13}$$

$$E_{(\varepsilon)}^{**}=E_{M_k,\theta,0}^*\cup E_{t,\theta,\varepsilon}^*.\tag{5.14}$$

在这些假设下，有

① E_1是二维欧氏空间R^2中的子距离空间，且$E_{t,\theta,\varepsilon}$是距离空间E_1中的开集，$E_{M_k,\theta,0}$是距离空间$E_1(R=0)$中的开集；

② $E_{M_k,\theta,0}\subset E_{M_k,\theta,0}^*$,　$E_{t,\theta,\varepsilon}\subset E_{t,\theta,\varepsilon}^*$,　$E_{(\varepsilon)}^*\subset E_{(\varepsilon)}^{**}$；

③ 若存在$R=R_0$的$u\in E_1-E_0$，使$\theta_k(x_{(u)}^{(k+1)})\in\Delta_\theta$，则有

1) $\exists\alpha_1\in[0,1)$，使$R_1=\alpha_1R_0$；

2) 若$0<\varepsilon<R_0-R_1$，则$u=(R,s)\in E_{(\varepsilon)}^{**}$时，

$$R=\alpha R_0\ \ (\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]\cup\{0\}\subset[0,\alpha_2]),\tag{5.15}$$

其中$\alpha_2=(R_1+\varepsilon)(R_0)^{-1}<1$。

证　②显然成立。①和③由§2中3°，$E_{(\varepsilon)}^{**}$定义和[7]的定理4.2推出。

定理2　在定理1的假设下，又设

$$E_{1,2}=\{u|u\in E_1,0\leqslant R\leqslant R^0<\infty,0<q_0\leqslant q_j^{(k)}(R)\ \ (j=1,2,\cdots,n)\},\tag{5.16}$$

$$E_{1,3}=\{u|u\in E_1,0\leqslant R\leqslant R^0<\infty,0<q_0\leqslant q_j^{(k)}(R)\leqslant q^0<\infty(j=1,2,\cdots,n)\}\tag{5.17}$$

便有①当$s\to\infty$且$u\in E_{1,2}-E_0$时，$\|x_{(u)}^{(k+1)}-x^{(k)}\|$一致收敛于0；

②当$s\to\infty$且$u\in E_{1,2}-E_0$时，$F_i(x_{(u)}^{(k+1)})(i\in I)$，$\varphi_k(x_{(u)}^{(k+1)})$，$\overline{\varphi}_k(x_{(u)}^{(k+1)})$和$\phi_k(x_{(u)}^{(k+1)})$分别一致收敛于$F_i(x^{(k)})(i\in I)$，$\varphi_k(x^{(k)})$，$\overline{\varphi}_k(x^{(k)})$和$\phi_k(x^{(k)})$；

③当$s\to\infty$且$u\in E_{1,2}-E_0$时，$\theta_k(x_{(u)}^{(k+1)})$一致收敛于0。

证 由§2中3°和文〔7〕定理1.3′推出。

定理3 在定理1及其③和③2)的假设下，又设$\Delta x(u)$的方向角为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，则$u\in E_{(\varepsilon)}^{**}$时，有

① $|F_i(x_{(u)}^{(k+1)})|<\varepsilon_i\quad(i\in I_k)$；

②
$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_k(x^{(k)})-\overline{\varphi}_k(x_{(u)}^{(k+1)})&=R[\varphi_k(x_{(u)}^{(k+1)})-\varphi_k(x^{(k)})]+[\phi_k(x^{(k)})-\phi_k(x_{(u)}^{(k+1)})]\\&=Z(x_{(u)}^{(k+1)})\overline{\varphi}_k(x^{(k)})+[1-\theta_k(x_{(u)}^{(k+1)})][-\frac{\partial\phi_k(x^{(k)})}{\partial\Delta x(u)}]\|\Delta x(u)\|\\&\quad-\alpha[\varphi_k(x_{(u)}^{(k+1)})-\varphi_k(x^{(k)})][M_k-\varphi_k(x^{(k)})]^{-1}\overline{\varphi}_k(x^{(k)})\\&\quad+[1-\theta_k(x_{(u)}^{(k+1)})][-\frac{\partial\phi_k(x^{(k)})}{\partial\Delta x(u)}]\|\Delta x(u)\|\\&\geq\alpha\overline{\varphi}_k(x^{(k)})+[1-\theta_k(x_{(u)}^{(k+1)})][\sum_{i=1}^{m}w_i^{(k)}(\frac{\partial F_i(x^{(k)})}{\partial\Delta x(u)})^2\\&\quad+s\sum_{j=1}^{n}q_j^{(k)}\cos^2\beta_j]\|\Delta x(u)\|^2\\&\geq\alpha\overline{\varphi}_k(x^{(k)})+[1-\theta^0][s\sum_{j=1}^{n}q_j^{(k)}\cos^2\beta_j]\|\Delta x(u)\|^2,\end{aligned}$$

且$Z(x_{(u)}^{(k+1)})\in[0,1)$，其中$\theta^0\in(0,1)$，$\alpha\in[0,1)$为(5.15)所表。

证 由§2中$q_j^{(k)}$取法，$E_{(\varepsilon)}^{**}$定义和文〔7〕定理4.4推出。

定理4 在定理3的假设下，若$\mu^{(k)}=(\mu_i^{(k)})(i\in I_k)$有特性因子$\eta^{(k)}=(\eta_i^{(k)})(i\in I_k$，看〔7〕)，$w^{(k)}=(w_i^{(k)})(i\in\overline{I}_k)$，有特性因子$v^{(k)}=(v_i^{(k)})(i\in\overline{I}_k$，看〔6〕)，$q^{(k)}=(q_j^{(k)})$ $(j=1,2,\cdots,n)$有特性因子$\Delta x^{(k)}=(\Delta x_j^{(k)})(j=1,2,\cdots,n$，看〔6〕)，则

① 定理3中①，②成立；

② $\varphi_k(x)$和$\{|F_i(x^{(k+1)})||i\in I_k\}$具有调节特性$\eta^{(k)}$；

③ $\overline{\varphi}_k(x)$和$\{|F_i(x^{(k+1)})||i\in\overline{I}_k\}$具有调节特性$v^{(k)}$；

④ $\sum_{j=1}^{n}q_j^{(k)}(x_j-x_j^{(k)})^2$和$\{x_j^{(k+1)}-x_j^{(k)}|j=1,2,\cdots,n\}$具有调节特性$\Delta x^{(k)}$。

证　由定理3得①；由①和〔7〕§5得②；由①和〔6〕得③和④。

定理5　设$\mu=(\mu_i)(\mu_i>0, i\epsilon I_k)$有特性因子$\eta=(\eta_i)(i\epsilon I_k)$，

$$\mu_i=\varepsilon_i^2\eta_i\|\mathrm{grad}\ F_i^2(x^{(k)})\|^{-1}(i\epsilon I_k,\text{看〔7〕}(5.28)). \tag{5.18}$$

① 若$[\mu]i$有特性因子$\eta([\mu]i)(j=1,2,\cdots,j_1(u)$，看〔7〕§5)，则

1）以$[\mu]i$和$\eta([\mu]i)$分别代换定理4中的$\mu^{(k)}$和$\eta^{(k)}$，其余不变，则定理4仍成立；

2）特性因子组$\{\eta([\mu]i)|j=1,2,\cdots,j_1(\mu)\}$中$\eta([\mu]i_1{}^{(\mu)})$与$\eta$最逼近。

② 若$[\mu]j$有特性因子$\eta([\mu]j)(j=j_2(\mu),j_2(\mu)+1,\cdots,|I_k|$，看〔7〕§5)，则

1）以$[\mu]j$和$\eta([\mu]j)$分别代换定理4中的$\mu^{(k)}$和$\eta^{(k)}$，其余不变，则定理4仍成立；

2）特性因子组$\{\eta([\mu]j)|j=j_2(\mu),j_2(\mu)+1,\cdots,|I_k|\}$中$\eta([\mu]j_{2(\mu)})$与$\eta$最逼近。

证　由定理4，(5.18)式和〔7〕§5推出。

参 考 文 献

〔1〕K. Levenberg, *Quart. Appl. Math.*, 2(1944), 164.
〔2〕沈阳东北计算中心、沈字619部队，光学设计文集，第一机械工业部情报所，1973，7.
〔3〕北京大学数力系，光学设计文集，第一机械工业部情报所，1973，19.
〔4〕常群，光学设计文集，科学出版社，1976.
〔5〕南京大学数学系计算数学专业编，光学系统自动设计中的数值方法，国防工业出版社，1976.
〔6〕王大麒等，中山大学学报（自然科学版），1980，1，24.
〔7〕王大麒，数学物理学报，4（1984），1，97.

The Damped Least Square Method for Separated Terms of a Sum with Fixed Objective Values

Wang Daqi

Abstract

This paper presents a family of iterative method with fixed objective values for solving the inequality system of nonlinear functions

$$\begin{cases} a_i\leqslant f_i(x)\leqslant b_i & (i\epsilon I_1^*) \\ a_i\leqslant f_i(x) & (i\epsilon I_2^*) \end{cases}$$

and discusses its application to automatic lens design.

Each iterative method in the above mentioned family possesses the following two important automatically adjustive properties:

1. If $f_i(x^{(k)})\epsilon(f_i^*-\alpha_{ki}\varepsilon_i,\ f_i^*+\alpha_{ki}\varepsilon_i)\subset(a_i,b_i)$, then $f_i(x^{(k+i)})\epsilon(a_i,\ b_i)$, where $f_i^*=2^{-1}(a_i+b_i)$, $\varepsilon_i=2^{-1}(b_i-a_i)$, $b_i>a_i(i\epsilon\ I_1^*)$, $\alpha_{ki}\epsilon(0,\ 1]$, $I=1,2,\cdots,i\epsilon I=I_1^*\cup I_2^*$, and $x^{(k)}(k=0,1,2,\cdots)$ being iterative points.

2. Each system $\{f_i(x^{(k+1)})\ |\ i\epsilon I\}$ at each iterative point $x^{(k+1)}$ $(k=0,1,2\cdots)$ can automatically be adjusted by some given rules.