中 山 大 学 学 报
1986年第3期　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№. 3, 1986

一类二阶抛物方程解的极值原理和界

林 长 好*

摘　要

本文利用抛物方程的极值原理，得到以非线性抛物方程

$$\Delta u - u_{,t} + \lambda\rho(x,t)f(u) = 0$$

的第一、第二类初边值问题的解所定义的某些泛函仅在临界点达到最大值．这一结果可用以估计某一类非线性抛物方程的解的界．

椭圆、抛物方程的解或解的梯度表达了某些重要的物理量，对这些物理量进行估计并求出它们先验的界，在理论和应用上都有重大意义。几年来，有大量文献[2-7]专门从事这方面的研究．它们共同的技巧是运用古典的Hopf第一、第二极值原理，推导出由某些椭圆边值问题的解及解的梯度所定义的泛函的极值原理．本文将上述文献的技巧和结果推广到抛物方程，从而导出一类抛物边值问题解的界．

设D是R^n中带光滑边界的有界域，$T>0$是某个固定的数．空间R^{n+1}中以D为底，高度为T的柱体为

$$G = \{(x,t) \mid x\in D,\ 0<t<T\}$$

G的边界由两部分组成

$$\Gamma = \{(x,t) \mid x\in D, t=0 \text{或} x\in\partial D, 0\leqslant t<T\}$$

$$D_T = \{(x,t) \mid x\in D, t=T\}$$

以$\Omega = \bar{G}\backslash\Gamma$表示$G$的内部和上底．$C^{(2m,m)}(\Omega)$表示在$\Omega$上关于$x$有直到$2m$阶连续导数、关于$t$有直到$m$阶连续导数（包括对$x$、$t$的混合导数）的函数类．$C^{(2m,m)}(\bar{G})$类似地定义．

引入Ω中的抛物算子

$$L - \frac{\partial}{\partial t} \equiv a^{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}$$

满足条件：$A)$ $a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j>0$，对$\forall(x,t)\in\Omega$，$\xi\in R^n$，$\xi\neq0$；

$B)$ a^{ij}, b^i在Ω中连续．

本文1984年1月收到

* 中山大学数学系80级研究生，现在华南师范大学．

引理1[1] 设算子$L-\frac{\partial}{\partial t}$满足$A$)、$B$)，函数$u\epsilon C^{(2,1)}(\Omega)\cap C^0(\bar{G})$满足微分不等式

$$Lu-u_{,t}\geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \tag{1}$$

则
$$\max_{\bar{G}} u=\max_{\Gamma} u \ (\min_{\bar{G}} u=\min_{\Gamma} u)$$

以Γ'记柱体Ω的侧面，即$\Gamma'=\Gamma\backslash D$。若在$\Gamma'$上任一点$P$处都可以作一个球$B$，使$B\subset\bar{G}$，且$B\cap\bar{G}=P$，称$\Gamma'$具有内部球性质。

引理2[1] 若算子$L-\frac{\partial}{\partial t}$满足$A$)、$B$)，$u\epsilon C^{(2,1)}(\Omega)\cap C^0(\bar{G})$在$\Omega$内满足微分不等式

$$Lu-u_{,t}\geqslant 0$$

Γ'具有内部球性质，若u在Γ'上某点P处取得非负最大值，只要在P点处外法向导数$\frac{\partial u}{\partial \nu}$存在，则
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P)>0$$

在有界柱体Ω上考虑抛物方程

$$\Delta u-u_{,t}+\lambda\rho(x,t)f(u)=0 \quad 在\Omega内 \tag{2}$$

首先讨论如下的第一初、边值问题及第二初、边值问题

$$\begin{cases}\Delta u-u_{,t}+\lambda\rho(x,t)f(u)=0 & 在\Omega内\\ u(x,0)=0 & x\epsilon\bar{D}\\ u(x,t)=0 & (x,t)\epsilon\Gamma'\end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases}\Delta u-u_{,t}+\lambda\rho(x,t)f(u)=0 & 在\Omega内\\ u(x,0)=0 & x\epsilon\bar{D}\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}=0 & (x,t)\epsilon\Gamma'\end{cases} \tag{II}$$

其中D是平面内带光滑边界的有界凸域，$\lambda>0$是参数，$\rho(x,t)\epsilon C^{(2,1)}(\bar{G})$是正函数，$f\epsilon C'(R)$，对$u\geqslant 0$，$f\geqslant 0$，为讨论方便，将只考虑(2)的正解，并设$u\epsilon C^{(3,2)}(\Omega)\cap C^{(2,2)}(\bar{G})$。

考虑辅助函数

$$\phi=\frac{|\nabla_x u|^2}{\rho}+h(u) \tag{3}$$

其中u是(2)的解，$h(u)$是待定函数，$|\nabla_x u|$表示只含对x求导。

$$\Delta\phi-\phi_{,t}=\frac{2u_{,ik}u_{,ik}}{\rho}-\frac{4u_{,i}u_{,ik}\rho_{,k}}{\rho^2}-2\lambda f'u_{,k}u_{,k}-\frac{2\lambda fu_{,k}\rho_{,k}}{\rho}$$
$$-\frac{|\nabla_x u|^2\Delta_t\rho}{\rho^2}+\frac{2|\nabla_x u|^2|\nabla_x\rho|^2}{\rho^3}+h''u_{,k}u_{,k}-\lambda f\rho h'$$

$$\because \quad u_{,i}u_{,k}u_{,ik}=\frac{\rho}{2}\left(\phi_{,k}u_{,k}+\frac{|\nabla_x u|^2u_{,k}\rho_{,k}}{\rho^2}-h'u_{,k}u_{,k}\right)$$

利用平面上的恒等式

$$u_{,i}u_{,i}u_{,ik}u_{,ik}=u_{,i}u_{,i}(\Delta u)^2+2u_{,i}u_{,ik}u_{,j}u_{,jk}-2\Delta uu_{,i}u_{,j}u_{,ij} \tag{4}$$

经计算得

$$\Delta\phi+\frac{L_k\phi_{,k}}{|\nabla_x u|^2}-\phi_{,t}=[(h'-2\lambda f)'-\frac{\Delta_t\rho}{\rho^2}]|\nabla_x u|^2+2(h'-2\lambda f)u_{,t}$$

$$+\rho(h'-\lambda f)(h'-2\lambda f)+\frac{2}{\rho}u_{,t}u_{,t}+\frac{|\nabla_x u|^2|\nabla_x\rho|^2}{\rho^3}-\frac{2u_{,t}u_{,k}\rho_{,k}}{\rho^2}\qquad(5)$$

其中　$L_k=-\rho[\phi_{,k}+2u_{,k}(\lambda f-h')-\frac{2u_{,t}u_{,k}}{\rho}]$

$\because$　$$\frac{2u_{,t}u_{,k}\rho_{,k}}{\rho^2}\leqslant\frac{|\nabla_x u|^2|\nabla_x\rho|^2}{\rho^3}+\frac{u_{,t}^2}{\rho}$$

当令　$h=2\lambda\int_0^u f(\eta)d\eta$　且$\Delta_t\rho\leqslant 0$　(6)

有　$$\Delta\phi+\frac{L_k\phi_{,k}}{|\nabla_x u|^2}-\phi_{,t}\geqslant 0$$

ϕ应在$\Gamma'\cup\bar{D}$上或在使$|\nabla_x u|=0$的点上取得最大值。

设u是(Ⅰ)的解，并设ϕ在Γ'上某点P处取得最大值。考虑P点处的法向导数$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$。

以u_s记切向导数，在Γ'上$u=0$蕴涵$u_s=0$，$u_{ss}=0$，故$|\nabla u|^2=u_\nu^2$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(P)=\frac{2u_\nu u_{\nu\nu}}{\rho}-\frac{2u_{,t}(u_{,t})_\nu}{\rho}-\frac{u_\nu^2\rho_\nu}{\rho^2}+\frac{u_{,t}^2\rho_\nu}{\rho^2}+2\lambda f u_\nu$$

$\because$　$\Delta u+u_{,tt}=u_{\nu\nu}+2Ku_\nu+u_{ss}=u_{,t}-\lambda\rho f+u_{,tt}$

$\therefore$　$u_{\nu\nu}=u_{,t}-\lambda\rho f+u_{,tt}-2Ku_\nu$

这里K是Γ'的平均曲率。容易证明D为凸域，∂D的曲率为正，则Γ'的平均曲率也为正。

又因为在Γ'上$u=0$蕴涵$u_{,t}=0$，$u_{,tt}=0$，故

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(P)=-\frac{2u_\nu^2}{\rho}(2K+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu}(\ln\rho))$$

若在Γ'上

$$K_g=2K+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu}(\ln\rho)\geqslant 0$$

则在P点处有

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(P)=-2u_\nu^2\rho^{-1}K_g\leqslant 0$$

与引理2矛盾。

假设ϕ在$\bar{D}$上取得最大值，因为在D上$u(x,y,0)=0$，可得$u_x=u_y=0$，故

$$\phi\leqslant 0$$

即　$$\int_0^u f(\eta)d\eta\leqslant 0$$

得出在Ω内$u\equiv 0$，与假设矛盾。

再假设u是(Ⅱ)的解，并设ϕ在Γ'上某一点P处取得最大值。因在Γ'上$u_\nu=0$，得$|\nabla u|^2=u_s^2$。

考虑P点处的法向导数

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(P)=\frac{2u_su_{s\nu}-2u_{,t}(u_{,t})_\nu}{\rho}-\frac{(u_s^2-u_{,t}^2)\rho_\nu}{\rho^2}+2\lambda fu_\nu$$

在Γ'的某坐标邻域内引入法坐标系得

$$u_{s\nu}=u_{\nu s}-2Ku_s$$

K是Γ'的平均曲率。

因为在柱面Γ'上，Γ'的方程与t无关，故Γ'上向外单位法向量为$\nu=(\nu_1(x,y),\nu_2(x,y),0)$，在$\Gamma'$上

$$(u_{,t})_\nu=u_{,tx}\nu_1+u_{,ty}\nu_2=(u_\nu)_{,t}=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(P)=-\frac{4Ku_s^2}{\rho}-\frac{u_s^2-u_{,t}^2}{\rho^2}\rho\nu=-\frac{2|\nabla_xu|^2}{\rho}\left(2K+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu}(\ln\rho)\right)-\frac{4Ku_{,t}^2}{\rho}$$

同样，若在Γ'上，$K_g=2K+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial\nu}(\ln\rho)\geqslant0$

有　　$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(P)\leqslant0$$

与引理2矛盾。

从而得到

定理1　设u是(Ⅰ)或(Ⅱ)的解，在Γ'上$K_g\geqslant0$，函数ρ，h满足(6)，则ϕ只在使$|\nabla_xu|=0$的点上取得最大值。

若在(2)中，$\rho\equiv1$，这时方程变成

$$\Delta u-u_{,t}+\lambda f(u)=0\quad 在\Omega内\tag{7}$$

由于D的凸性，相应地有

定理2　设u是(7)的第一、第二初、边值问题的解，$h=2\lambda\int_0^u f(\eta)d\eta$，则$\phi$只在使$|\nabla_xu|=0$的点上取得最大值。

当$n>2$时，利用Scharwz不等式

$$u_{,i}u_{,j}u_{,ik}u_{,jk}\geqslant u_{,i}u_{,ik}u_{,j}u_{,jk}$$

代替恒等式(4)，并相应地记

$$K_g=nK+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu}(\ln\rho)$$

仿上面证法，可以证得，当$n>2$时，定理1、定理2同样成立。

作为定理1、2的应用，讨论如下例子。

例　$\Delta u-u_{,t}+\lambda\rho(x,t)u^p=0$　　在Ω内，$p>-1$，

$u(x,0)=0$　　$x\in\bar{D}$

$u(x,t)=0$　　$(x,t)\in\Gamma'$

这里$\rho>0$，$\Delta_t\rho\leqslant0$，在Γ'上$K_g\geqslant0$，由定理1，得

$$|\nabla_xu|^2+\frac{2\lambda}{p+1}\rho u^{p+1}\leqslant\frac{2\lambda}{p+1}\rho u_M^{p+1}$$

设u在$P(x_0,t_0)\in\Omega$处达到最大，取Ω的横截面Dt_0，设Q是∂Dt_0上的点，r表示由P到边

界的距离。

$$\because \quad -\frac{du}{dr}\leqslant|\nabla_x u|\leqslant\sqrt{\frac{2\lambda}{p+1}\rho(u_M^{p+1}-u^{p+1})}$$

积分
$$-\int_P^Q\frac{du}{\sqrt{u_M^{p+1}-u^{p+1}}}\leqslant\int_P^Q\sqrt{\frac{2\lambda}{p+1}}\rho^{\frac{1}{2}}(r,t_0)dr$$

因
$$\text{左端}=u_M^{\frac{1-p}{2}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{(p+1)\Gamma\left(\frac{p+3}{2(p+1)}\right)}=u_M^{\frac{1-p}{2}}F(p)$$

记
$$d=\max_{p(x,t)\subset\Omega}\left(\min_{Q\in\partial D_t}\int_P^Q\rho^{\frac{1}{2}}(r,t)dr\right)$$

显然$\rho\equiv1$时，d表示Ω的最大内切圆柱之半径。

得
$$u_M^{\frac{1-p}{2}}F(p)\leqslant\sqrt{\frac{2\lambda}{p+1}}d$$

当$p>1$时，可以得到u_M的下界；当$-1<p<1$时，得到u_M的上界。当$p=1$时，$F(p)=\frac{\pi}{2}$，得参数$\lambda\geqslant\frac{\pi^2}{4d}$。

参 考 文 献

〔1〕Avner Friedman, Partial differential epuations of parabolic type, Prentice-Hall, Jnc.Englewood cliffs,N.J.,1964.

〔2〕L.E.Payne and G.A.Philippin, *J. Nonlinear Analysis*, 3(1979).

〔3〕L.E.Payne and G.A.Philippin, *J.Diff. Equat.* 37(1980),39-48.

〔4〕P.W.Scheafer and R.P.Sperb, *Siam.J.Mathematice Analysis*, 8(1977), 5, 871-878.

〔5〕P.W.Scheafer, *Quart. Apple. Math.*, 1978, 517-523.

〔6〕L.E.Payne and G.A.Philippin, *Siam J.Appl. Math.*, 33(1977), 446-455.

〔7〕L.E.Payne. *Indian J.Math.Mech.*, Special Issue,1968,51-59.

Maximum Principles and Bounds for Solutions of a Class of Second Order Parabolic Equations

Lin Changhao

Abstract

The first and second initial-boundary value problems for second order semilinear parabolic equation

$$\Delta u+u_{,t}+\lambda\rho(x,t)f(u)=0$$

are considered. The maximum principles of parabolic equations are used to deduce that certain functionals defined for solutions of the problems attain a maximum at a point at which $|\nabla_x u|=0$. This result is then used to determine bounds for solutions of a class of semilinear parabolic equations.