

关于一类泛函微分方程解的渐近性态

徐远通
(数学系)

摘 要

本文研究Bernfeld和Haddock在1976年“非线性系统及其应用”国际会议上提出的问题,分析一类自治泛函微分方程,当普通方面不支配泛函方面时解的渐近性态。

1976年, S.R.Bernfeld和J.R.Haddock在“非线性系统及其应用”国际会议上提出问题:“如果一个泛函微分方程的普通方面并不支配泛函方面,情况该是怎样呢?”并提出猜想:时滞方程

$$x' = -x^{-\frac{1}{3}}(t) + x^{-\frac{1}{3}}(t-r) \quad (r > 0)$$

的每个解,当 $t \rightarrow \infty$ 时趋于常数。1981年丁同仁^[1]对一类更广泛的时滞方程证得了结论。

本文拟对自治泛函微分方程研究这一问题,以期进一步对Bernfeld和Haddock提出的问题作出解答。

§1. 若干记号和假设

本文考虑泛函微分方程

$$\frac{dx}{dt} = F(x_t) \quad (t \geq \sigma) \quad (1)$$

按通常假设, $C([\sigma-r, \sigma+A])$ 表示从 $[\sigma-r, \sigma+A]$ 映射到 R 的连续函数空间($r > 0, A > 0$), C 表示空间 $C([-r, 0])$ 。为叙述方便,对 $\varphi \in C([-r, A])$ 及 $I = [\alpha, \beta] \subset [-r, A]$,定义 $\varphi^I \in C([-r, -r+(\beta-\alpha)])$ 是适合以下关系的函数:

$$\varphi^I(\theta) = \varphi(\alpha+r+\theta) \quad (-r \leq \theta \leq -r+(\beta-\alpha)) \quad (2)$$

特别,记区间 $J = [-r, -s]$ ($0 < s \leq r$), 则

$$\varphi^J(\theta) = \varphi(\theta) \quad \text{对 } \theta \in [-r, -s] \quad (3)$$

在本文中我们始终假设方程(1)的右端 F 是 C 上的连续泛函,且可用下式表示:

$$F(\varphi) = f(\varphi(0)) + G(\varphi^J) \quad \text{对 } \varphi \in C \quad (4)$$

本文1983年12月收到

这里 $f \in C(R)$ 是严格递减函数, G 是 $C(J)$ 上的连续泛函. 注意到对 $t \in [\sigma, \sigma + A]$, $x_t(0) = x(t)$, 泛函微分方程 (1) 可写为

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + G(x_t^J) \quad (t \geq \sigma) \tag{5}$$

这样一来, (5) 右端的 $f(x)$ 表示泛函微分方程 (1) 的“普通方面”, 而 $G(x_t^J)$ 则可为“泛函方面”. 我们把这两方面区分开来, 由此着手研究其相互关系及对解性质的影响.

§2. 解的存在唯一性

定理 1 泛函微分方程 (1) 适合初始条件

$$x_\sigma = \phi \quad (\phi \in C) \tag{6}$$

的解在区间 $[\sigma - r, \infty)$ 上存在且唯一.

证 利用归纳法, 对区间 $[\sigma - r, \sigma + ns]$ ($n = 1, 2, \dots$) 证明解的存在唯一性. 首先, 对 $n = 1$, 可记 $I(t) = [-r + t, -s + t]$, 定义函数 $g_1(t) \in C([0, s])$ 如下:

$$g_1(t) = G(\phi^{I(t)}) \quad (t \in [0, s]) \tag{7}$$

由 [1] 的命题 2, 知下述初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g_1(t), \quad x(0) = \phi(0) \tag{8}$$

在区间 $[0, s]$ 有唯一解. 设解为 $\phi_1(t)$, 令 $\Psi_1 \in C([-r, s])$ 为:

$$\Psi_1(\theta) = \begin{cases} \phi(\theta) & -r \leq \theta \leq 0, \\ \phi_1(\theta) & 0 < \theta \leq s \end{cases} \tag{9}$$

不难验证: $x(t) = \Psi_1(t - \sigma)$ 是初值问题 (1) (6) 在区间 $[\sigma - r, \sigma + s]$ 上的唯一解.

设对 $n = K$ 已作出函数 $\Psi_K \in C([-r, Ks])$, 使得函数 $x(t) = \Psi_K(t - \sigma)$ 是 (1) (6) 在区间 $[\sigma - r, \sigma + Ks]$ 的唯一解, 那么, 对 $n = K + 1$ 定义 $\Psi_{K+1} \in C([-r, (K + 1)s])$ 为:

$$\Psi_{K+1}(\theta) = \begin{cases} \Psi_K(\theta) & -r \leq \theta \leq Ks \\ \phi_{K+1}(\theta) & Ks < \theta \leq (K + 1)s \end{cases}$$

其中 ϕ_{K+1} 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g_{K+1}(t), \quad x(Ks) = \Psi_K(Ks)$$

的唯一解 ($g_{K+1}(t) = G(\Psi_K^{I(t)})$, $Ks \leq t \leq (K + 1)s$), 则 $x(t) = \Psi_{K+1}(t - \sigma)$ 是 (1) (6) 在 $[\sigma - r, \sigma + (K + 1)s]$ 上的唯一解. 这样, 可知对于区间 $[\sigma - r, \infty)$ 定理成立.

推论 设 $f \in C(R)$ 是严格递减函数, $g_i \in C(R)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则有界变时滞方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + \sum_{i=1}^n g_i(x(t - \tau_i(t))) \tag{10}$$

(其中 $\tau_i(t)$ 连续且 $s \leq \tau_i(t) \leq r$, 对 $t \geq \sigma$) 适合初始条件 $x(t) = \phi(t)$ ($\sigma - r \leq t \leq \sigma$) 的解在 $[\sigma - r, \infty)$ 上存在唯一.

§3. 解的有界性与渐近性

本节将具体分析泛函微分方程(1)的任何一个解 $x = x(t)$ ($\sigma - t \leq t < \infty$). 我们记区间

$$I_n = (\sigma - r + ns, \sigma + ns], \quad I_n' = [\sigma - 2r + ns, \sigma + ns]$$

对自然数 $n \geq \lceil \frac{2r}{s} \rceil + 1$, 取 $\alpha_n \in I_n'$, 使得

$$x(\alpha_n) = \max_{t \in I_n'} \overset{\text{Def.}}{x(t)} = M_n \quad (11)$$

我们对方程(1)作以下基本假设:

(H): 设对任何 $\varphi \in C$, 有递增函数 $\lambda_\varphi(\theta)$ 定义在区间 J 上, $\Delta_\varphi = \lambda_\varphi(-s) - \lambda_\varphi(-r) > 0$, 使得

$$G(\varphi^J) \leq \frac{1}{\Delta_\varphi} \int_{-s}^{-r} f(\varphi(\theta)) d\lambda_\varphi(\theta) \quad (12)$$

此处积分是Stieltjes积分.

引理 1 如果(H)成立, 且存在 $\xi \in I_n$, 使得 $x'(\xi) = 0$, 则必有 $x(\xi) \leq M_{n-1}$.

证 因 $x'(\xi) = 0$, 故 $G(x_\xi^J) = -f(x_\xi(0))$, 由假设(H), 存在 $\lambda_\xi(\theta)$, 使 $G(x_\xi^J) \leq \frac{1}{\Delta_\xi} \int_{-s}^{-r} f(x_\xi(\theta)) d\lambda_\xi(\theta)$. 根据Stieltjes积分性质, 易知存在 $\theta_\xi \in J$, 使得:

$$-f(x_\xi(\theta_\xi)) = \frac{1}{\Delta_\xi} \int_{-s}^{-r} f(x_\xi(\theta)) d\lambda_\xi(\theta) \quad (13)$$

从而 $f(x_\xi(\theta)) \leq f(x_\xi(0))$, 因为 f 严格递减, 所以,

$$x(\xi + \theta_\xi) \geq x(\xi)$$

注意到 $\xi \in I_n$, $\theta_\xi \in J$, 而 $\xi + \theta_\xi \in I'_{n-1}$, 因此,

$$x(\xi) \leq x(\xi + \theta_\xi) \leq M_{n-1}.$$

引理 2 如果(H)成立, 且有整数 m 使 $M_{m-1} < M_m$, 那么必有 $M_m < M_{m+1}$, 且解 $x(t)$ 在 $[\sigma + ms, \sigma + (m+1)s]$ 上严格递增.

证 因 $M_m = x(\alpha_m)$ 是 $x(t)$ 在 I_m' 的最大值, $M_{m-1} < M_m$, 故应有 $\alpha_m \in I_m$, 若不然, $\alpha_m \in I_m' - I_m$, 由 $\sigma - r + ms \leq \sigma + (m-1)s$ 知 $\alpha_m \in I'_{m-1}$, 则 $M_m = x(\alpha_m) \leq M_{m-1}$ 与假设相矛盾; 同时, 可断定 $\alpha_m = \sigma + ms$, 不然的话则 $\alpha_m < \sigma + ms$, 即 $x(t)$ 在 I_m' 的内点达最大值, 则 $x'(\alpha_m) = 0$, 按引理 1 仍有 $M_m = x(\alpha_m) \leq M_{m-1}$ 与假设相矛盾. 这样, $x(t)$ 在 I_m' 的最大值只在右端点达到, 且由引理 1, 唯有 $x'(\sigma + ms) > 0$, 从而有 $\xi \in I'_{m+1}$ 使 $x(\xi) > M_m$, 因此, $M_{m+1} > M_m$ 成立.

另一方面, 因必有区间 $[\sigma + ms, \eta)$ 使 $x'(t) > 0$, 而 $\eta < \infty$ 时 $x'(\eta) = 0$, 由引理 1, 易知 $\eta \geq \sigma + (m+1)s$, 因此 $x(t)$ 在 $[\sigma + ms, \sigma + (m+1)s]$ 上严格递增.

引理 3 如果(H)成立, 则解 $x(t)$ 在 $[\alpha, \alpha + 2r)$ ($\alpha \geq \sigma$)上不可能是严格递增的.

证 由(H)成立, 对 $x(t)$, 应存在函数 $\lambda_t(\theta)$ 使

$$G(x_t^J) \leq \frac{1}{\Delta_t} \int_{-s}^{-r} f(x_t(\theta)) d\lambda_t(\theta) \quad (\text{对 } t \geq \sigma)$$

同时从Stieltjes积分性质可求出 $\theta_t \in J$, 使得

$$-f(x_t(\theta_t)) = -\frac{1}{\Delta_t} \int_{-s}^{-r} f(x_t(\theta)) d\lambda_t(\theta)$$

现设引理结论不成立, 则对 $t \in [\alpha + r, \alpha + 2r]$ 有

$$x(t + \theta_t) < x(t)$$

此即 $x_t(\theta_t) < x_t(0)$, 从而 $G(x_t^J) \leq -f(x_t(\theta_t)) < -f(x_t(0))$,

由(5)式得出对 $t \in [\alpha + r, \alpha + 2r]$ 有:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x_t(0)) + G(x_t^J) < 0 \tag{14}$$

即 $x(t)$ 在 $[\alpha + r, \alpha + 2r]$ 递减, 由此得出矛盾, 故引理结论成立.

定理2 假定(H)成立, 则泛函微分方程(1)的每个解 $x(t)$ 有上界, 且 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于常数或 $-\infty$.

证 首先可证明 $M_n \leq M_{n-1}$, 若不然, 设有整数 m 使 $M_{m-1} < M_m$, 则由引理2推出 $M_m < M_{m+1}$, 且 $x(t)$ 在区间 $I^{(1)} = [\sigma + ms, \sigma + (m+1)s]$ 严格递增; 再从 $M_m < M_{m+1}$, 则推出在 $I^{(2)} = [\sigma + (m+1)s, \sigma + (m+2)s]$ 严格递增, 依次类推, $x(t)$ 在 $I^{(k)} = [\sigma + (m+k-1)s, \sigma + (m+k)s]$ 严格递增, 从而在 $I^{(1)} \cup I^{(2)} \cup \dots \cup I^{(k)}$ 上严格递增, 只要取 $K \geq \frac{2r}{s}$, 则得出 $x(t)$ 在 $[\sigma + ms, \sigma + ms + 2r]$ 上严格递增, 与引理3矛盾, 可见上面断言成立.

这样, $\{M_n\}$ 是单调递减序列, 由 M_n 的定义知 $x(t)$ 有上界. 这时, 记 $M = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$, 则 $M < \infty$. 若 $M = -\infty$, 则定理结论成立; 若 $M > -\infty$, 则令 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = N$, 当然 $N \leq M$, 我们往证 $N = M$.

实际上, 若 $N < M$, 则存在 L 适合 $N < L < M$, 及任意大的正整数 n , 使得在 $[\sigma - 2r + ns, \sigma - 2r + (n+1)s]$ 中有 τ_n 适合 $x(\tau_n) = L$, 此时 $[\tau_n, \tau_n + 2r + s] \subset I'_n \cup I'_{n+1} \cup I'_{n+2}$. 因对每个 $t \in [\tau_n, \tau_n + 2r + s]$, 均有 $\theta_t \in J$. 使

$$-f(x_t(\theta_t)) = -\frac{1}{\Delta_t} \int_{-s}^{-r} f(x_t(\theta)) d\lambda_t(\theta) \geq G(x_t^J)$$

于是 $t + \theta_t \in [\tau_n - r, \tau_n + 2r] \subset [\sigma - 3r + ns, \sigma + (n+1)s]$, 我们取 $l = \lceil \frac{r}{s} \rceil + 1$, 则 $[\sigma - 3r + ns, \sigma + (n+1)s] \subset I'_{n-l} \cup I'_{n-l+1} \cup \dots \cup I'_{n+1}$. 计及 $M_{n-l} \geq M_{n+1-l} \geq \dots \geq M_{n+1}$, 故 $x_t(\theta_t) \leq M_{n-l}$.

现令 $M_{n-l} = M + \varepsilon_n$, ($0 \leq \varepsilon_n \leq 1$), 那么由 $L < M$ 及 $x'(t) \leq f(x(t)) - f(x_t(\theta_t)) \leq f(x(t)) - f(M + \varepsilon_n)$ 则按文[1]的命题4可推出有正数 μ 与 τ_n, ε_n 无关, 使

$$M_{n-l} - x(t) \geq \mu > 0 \quad (\tau_n \leq t \leq \tau_n + 2r + s) \tag{15}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x(t - \tau_i(t))) \quad (20)$$

(其中 $\tau_i(t)$ 连续, 对 $t \geq \sigma$, $r \geq \tau_1(t) > \tau_2(t) > \dots > \tau_n(t) \geq s$)的解 $x(t)$ 有界且当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于某一常数。

注 当 $\tau_i(t) \equiv ir$ 时可得到文[3]中例3.4相同的结论; 当 $n=1$ 及 $\tau(t) \equiv r$, 可得到文[1]中的定理3; 特别对 $f(u) = -u^{\frac{1}{3}}$ 成立, 即Bernfeld和Haddock所提出的猜想成立。

参 考 文 献

- [1] 丁同仁, 中国科学, 8 (1981), 939-945.
 [2] Bernfeld, S.R. & Haddock, J.R., *Nonlinear Systems and Applications* (An International Conference), ed. Lakshmikantham, V., 1977, 561-566.
 [3] Haddock, J.R. & Terjeki, J., *J. Diff. Eqns.*, 48 (1983), 95-122.
 [4] Hale, J., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1977.

Asymptotic Behavior of the Solutions of a Class of Functional Differential Equations

Xu Yuantong

Abstract

We discuss the problem presented by S. R. Bernfeld and J. R. Haddock in the international conference "Nonlinear Systems and Applications" (1976). We investigate the existence, uniqueness, boundedness and asymptotic behavior of the solutions of functional differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + G(x_t^J)$$

where $x_t^J(\theta) = x_t(\theta)$, $\theta \in [-r, -s]$, $s > 0$.