1987年第2期　中山大学学报　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№. 2. 1987

·研究简报·

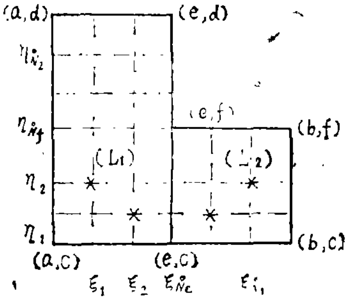
L型域上散乱数据带连续边界条件的最优插值

胡日章

（计算机科学系）

本文利用文[1]的方法讨论L型域上的最优插值问题。提法如下：

设$L=(a,e)\times(c,d)\cup[e,b)\times(c,f)$为平面上的$L$型区域（如图1所示）。$H^{m,n}(L)=\{u(x,y):u^{(m,n)}(x,y)\in L_2(L)\}$求函数$s(x,y)\in H^{m,n}(L)$，使下述泛函在$s(x,y)$上达极小：



$$J_{m,n}(u)=\frac{1}{2}\iint_L[u^{(m,n)}(x,y)]^2\,dxdy,$$

$$u(x,y)\in H^{m,n}(L)\cap\mathring{D}_F\cap B_F. \qquad (1)$$

其中：$B_F=\{u(x,y):\ u^{(i,0)}(x,y)|_{x=\xi}=F_{i\xi}(y),\ i\in I_\xi,\ \xi=a,b,e;\ \xi=a$时，$c\leqslant y\leqslant d;$
$\xi=b$时，$c\leqslant y\leqslant f;\ \xi=e$时，$f\leqslant y\leqslant d$。$u^{(0,j)}(x,y)|_{y=\eta}=F_{j\eta}(x),j\in J_\eta,\ \eta=c,d,f;\ \eta=c$时，$a\leqslant x\leqslant b;\ \eta=d$时，$a\leqslant x\leqslant e;\ \eta=f$时，$e\leqslant x\leqslant b\}$。

$I_\xi\subset I=\{0,1,\cdots,m-1\},\ J_\eta\subset J=\{0,1,\cdots,n-1\}$。

$\mathring{D}_F=\{u(x,y):\lambda_i^{\alpha\beta}u=F_i^{\alpha\beta},\ \alpha\in I_i,\ \beta\in J_i,\ i=1,2,\cdots,\mathring{N}\}$。

$$\lambda_i^{\alpha\beta}\equiv u^{(\alpha,\beta)}(x_i,y_i),\ I_i\subset I,\ J_i\subset J$$

插值点$(x_i,y_i)\in L$可分布在除直线$\overline{cf}(x=e,c\leqslant y\leqslant f)$外的任意位置。$F_i^{\alpha\beta}$为任意实数组。边界值函数$F_{i\xi}(y)\in H^n$，$F_{j\eta}(x)\in H^m$且满足协调条件。记$\mathring{F}=\{F_i^{\alpha\beta}\}$，$F=\{F_{ia},F_{ib},F_{ie},F_{jc},F_{jd},F_{jf}\}$，记号$B_0$和$\mathring{D}_0$分别表示$F$和$\mathring{F}$中全部数据为零的情形。

如图1将L分为两个矩形L_1和L_2，公共边为$\overline{cf}$。p_1和p_2为平面到x轴和y轴的垂直投影，$\mathring{\pi}=\{(x_i,y_i)\}_1^{\mathring{N}}\in L$，其中$\{(x_i,y_i)\}_1^{\tilde{N}}\in L_1$，$\{(x_i,y_i)\}_{\tilde{N}+1}^{\mathring{N}}\in L_2$

$$\mathring{\pi}_1=p_1\mathring{\pi}=\{\xi_i\}_1^{\mathring{N}_e-1}+\xi_{\mathring{N}_e}+\{\xi_i\}_{\mathring{N}_e+1}^{\mathring{N}_1},$$

本文1986年1月收到

$$a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_{\mathring{N}_e-1}<\xi_{\mathring{N}_e}=e<\xi_{\mathring{N}_e+1}<\cdots\xi_{\mathring{N}_1+1}=b$$

$$\mathring{\pi}_2=p_2\mathring{\pi}=\{\eta_i\}_1^{\mathring{N}_2},c=\eta_0<\eta_1<\cdots<\eta_{\mathring{N}_f}<\cdots<\eta_{\mathring{N}_2+1}=d.$$

$$\mathring{\pi}_1\times\mathring{\pi}_2=\{(\xi_i,\eta_j)\}_{i=1,\ j=1}^{\mathring{N}_e-1,\ \mathring{N}_2}+\{(\xi_i,\eta_j)\}_{i=\mathring{N}_e+1,\ j=1}^{\mathring{N}_1,\ \mathring{N}_f-1}$$

如此将L_1和L_2分为若干个小矩形R_{ij}。

一、解的特征性质和结构

定理1 设$s(x,y)\in H^{m,n}(L)\cap c^{2m,2n}(L\backslash\mathring{\pi}_1\times\mathring{\pi}_2)$是最优插值解，则它满足下述特征性质：

1) $s^{(2m,2n)}(x,y)=0,\ (x,y)\in R_{ij}$

2) $[s^{(2m-\mu-1,2n)}(\cdot,y)]_{\xi_i}=0,\ \eta_j<y<\eta_{j+1},\ \mu\in I,$

$i=1,\cdots,\mathring{N}_1,\ i\neq\mathring{N}_e,\ \ j=0,1,\cdots,\mathring{N}_2$

$[s^{(2m,2n-\nu-1)}(x,\cdot)]_{\eta_j}=0,\ \xi_i<x<\xi_{i+1},\ \nu\in J,$

$i=0,1,\cdots,\mathring{N}_1,\ \ j=1,\cdots,\mathring{N}_2$

3) $[s^{(2m-\mu-1,2n)}(\cdot,y)]_e=0,\ c\leqslant y\leqslant f,\ \mu\in I$

4) $[s^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot,\cdot)]_{\xi_i,\eta_j}=0,\mu\in I,\ \nu\in J,\ (\xi_i,\eta_j)\in\mathring{\pi}_1\times\mathring{\pi}_2\backslash\mathring{\pi}$

$[s^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot,\cdot)]_{x_i,y_i}=0,\ \mu\in I\backslash I_i,\ \nu\in J\backslash J_i,\ i=1,\cdots\mathring{N}$

5) $s^{(2m-\mu-1,2n)}(\alpha,y)=0,\ \mu\in I\backslash I_\alpha,\ \alpha=a,e,b,$

$s^{(2m,2n-\nu-1)}(x,\beta)=0,\ \nu\in J\backslash J_\beta,\ \beta=c,f,d.$

6) $s^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\alpha,\beta)=0,\ \mu\in I\backslash I_\alpha,\ \nu\in J\backslash J_\beta$

$(\alpha,\beta)\in\{(a,c),(b,c),(b,f),(e,d),(a,d)\}.$

其中记号

$$[s(\cdot,y)]_{\xi_i}=\begin{cases}s(\xi_i+0,y)-s(\xi_i-0,y) & a<\xi_i<b\\ s(a,y) & \xi_i=a\\ -s(b,y) & \xi_i=b\end{cases}$$

$[s(x,\cdot)]_{\eta_j}$类似定义，$[s(\cdot,\cdot)]_{\xi_i,\eta_j}=[s(\xi_i+0,\cdot)]_{\eta_j}-[s(\xi_i-0,\cdot)]_{\eta_j}$

由最优解存在的必要条件第一变分为零和广义拉格朗日恒等式[1]可得定理的证明。

利用特征性质1)—4)，最优解可以表为L_1和L_2上的分块形式，并通过特征性质3)，补充公共边$\overline{cf}$上的条件可将L型域上的插值问题化为矩形域L_1和L_2上的插值问题。为此，定义单变量插值：对$f(x)$，$g(y)$，$x\in[a,e]$，$y\in[c,d]$，令

$$\gamma_{i\xi}f=\begin{cases}f^{(i)}(\xi) & i\in I_\xi\\ f^{(2m-i-1)}(\xi) & i\in I\backslash I_\xi\end{cases}\ \xi=a,e;\quad \gamma_{j\eta}g=\begin{cases}g^{(j)}(\eta) & j\in J_\eta\\ g^{(2n-j-1)}(\eta) & j\in J\backslash J_\eta\end{cases}\ \eta=c,d.$$

假定相应于上述插值泛函的插值问题I_1,I_2有唯一解，$\phi_{ia}(x),\phi_{ie}(x)\in p_{2m}(x)$，$\phi_{jc}(y)$，$\phi_{jd}(y)\in p_{2n}(y)$分别为插值双正交基，则

$$I_1f(x)=\sum_{i\in I}(\gamma_{ia}f)\phi_{ia}(x)+\sum_{i\in I}(\gamma_{ie}f)\phi_{ie}(x)$$

$$I_2g(y)=\sum_{j\in J}(\gamma_{jc}g)\phi_{jc}(x)+\sum_{j\in J}(\gamma_{jd}g)\phi_{jd}(y)$$

对于$\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x),x\in[e,b],y\in[c,f]$，完全类似地有

$$\widetilde{I}_1\widetilde{f}(x)=\sum_{i\in I}(\widetilde{\gamma}_{ie}\widetilde{f})\widetilde{\phi}_{ie}(x)+\sum_{i\in I}(\widetilde{\gamma}_{ib}\widetilde{f})\ \widetilde{\phi}_{ib}(x)$$

$$\widetilde{I}_2\widetilde{g}(y)=\sum_{j\in J}(\widetilde{\gamma}_{jc}\ \widetilde{g})\widetilde{\phi}_{jc}(y)+\sum_{j\in J}(\widetilde{\gamma}_{jf}\widetilde{g})\widetilde{\phi}_{jf}(y)$$

补充边界值函数

$$F_{i\xi}(y)\equiv 0,\qquad i\in I\backslash I_\xi,\qquad \xi=a,b,e,$$

$$F_{j\eta}(x)\equiv 0,\qquad j\in J\backslash J_\eta,\qquad \eta=c,d,f,$$

并将原来的$F_{ie}(y)$按下述方式扩充定义

$$F_{ie}(y)=\begin{cases}F_{ie}(y) & y\in[f,d]\\ \widehat{F}_{ie}(y) & y\in[c,f]\end{cases}\qquad i\in I$$

其中$\widehat{F}_{ie}(y)$是下述边值问题的解：

$$\begin{cases}\sum_{i\in I}(\widetilde{\phi}_{ie}^{(2m-\mu-1)}(e)-\phi_{ie}^{(2m-\mu-1)}(e))\widehat{F}_{ie}^{(2n)}(y)=\sum_{i\in I}(F_{ia}^{(2n)}(y)\ \phi_{ia}^{(2m-\mu-1)}(e)\\ \qquad\qquad -F_{ib}^{(2n)}(y)\widetilde{\phi}_{ib}^{(2m-\mu-1)}(e))\\ \gamma_{jc}\widehat{F}_{ie}(y)=\gamma_{ie}F_{jc}(x)\\ \widetilde{\gamma}_{jf}\ \widehat{F}_{ie}(y)=\widetilde{\gamma}_{ie}F_{jf}(x)\qquad \mu,i\in I;j\in J.\end{cases}\tag{2}$$

则最优解$s(x,y)$可写为分块形式

$$s_1(x,y)=\sum_{i\in I}F_{ia}(y)\phi_{ia}(x)+\sum_{i\in I}F_{ie}(y)\phi_{ie}(x)+\sum_{j\in J}(R_1F_{jc})\psi_{jc}(y)+\sum_{j\in J}(R_1F_{jd})\psi_{jd}(y)$$

$$+\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\sum_{\mu\in I_j}\sum_{\nu\in J_j}c_j^{\mu\nu}R_1G_1^{(0,\mu)}(x,x_j)R_2G_2^{(0,\nu)}(y,y_j),\qquad (x,y)\in L_1\tag{3}$$

$$s_2(x,y)=\sum_{i\in I}\widehat{F}_{ie}(x)\widetilde{\phi}_{ie}(x)+\sum_{i\in I}F_{ib}(y)\ \widetilde{\phi}_{ib}(x)+\sum_{j\in J}(\widetilde{R}_1F_{jc})\widetilde{\phi}_{jc}(y)+\sum_{j\in J}(\widetilde{R}_1F_{jd})\widetilde{\psi}_{jd}(y)$$

$$+\sum_{j=\widetilde{N}+1}^{\mathring{N}}\sum_{\mu\in I_j}\sum_{\nu\in J_j}c_j^{\mu\nu}\widetilde{R}_1G_1^{(0,\mu)}(x,x_j)\widetilde{R}_2G_2^{(0,\nu)}(y,y_j),\qquad (x,y)\in L_2\tag{4}$$

其中$R_i=E-I_i$，$\widetilde{R}_i=E-\widetilde{I}_i$，$i=1,2$，$E$是恒等算子。

$$G_1(x,\xi)=(x-\xi)_+^{2m-1}/(2m-1)!,\quad G_2(y,\eta)=(y-\eta)_+^{2n-1}/(2n-1)!$$

二、解的存在唯一性和解法

当函数$u\in B_F$且满足特征性质5)—6)时，记为$u\in\breve{B}_F$，其特殊情形$F\equiv 0$记为$u\in\breve{B}_0$。可以

验证上节定义的分块形式的$s(x,y)\in\tilde{B}_F$。

定义 称L型域上带连续边界条件的最优插值问题是广义(m,n)适定的，如果

$$\begin{cases} s\in\tilde{B}_0\cap\mathring{D}_0 \\ s\in N_l=\{\sum_{i=1}^{m}g_i(y)\phi_i(x)+\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\phi_i(y)\} \end{cases}$$

其中$l=\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial x^n}$，$span\{\phi_i\}_1^m=p_m(x)$，$span\{\psi_j\}_1^n=p_n(y)$，$f_i(x)\in H^m$，$g_i(y)\in H^n$，则$s(x,y)\equiv 0$。

定理2 设L型域上带连续边界条件的最优插值问题是广义(m,n)适定的，且对边界值函数F，存在$u(x,y)\in H^{m,n}(L)\cap\tilde{B}_F$，则对上述$F$和任意插值数据$F_i^{\alpha\beta}$，最优插值问题有唯一解$s(x,y)$。

推论 设σ是最优插值解，$f\in B_F\cap\mathring{D}_F\cap H^{m,n}(L)$，则有“第一积分关系”

$$J_{m,n}(f)=J_{m,n}(\sigma)+J_{m,n}(f-\sigma)$$

和最小模性质

$$J_{m,n}(\sigma)\leqslant J_{m,n}(f)$$

成立。

下面的定理指出了最优插值问题的解法。

定理3 如果插值问题$I_1,I_2,\tilde{I}_1,\tilde{I}_2$唯一可解，常微边值问题(2)有唯一解，则L型域上带连续边界条件最优插值问题唯一存在且可表为形如(3)、(4)的分块形式，其中$\hat{F}_{ie}(y)$、$(c\leqslant y\leqslant d)$由(2)决定，系数$\{c_j^{\mu\nu}\}_{j=1}^{\tilde{N}}$，$\mu\in I_j,\nu\in J_j$由对称的线方程组 $AC=b$

决定。$A=(a_{i\ j}^{\alpha\beta,\mu\nu})$，$b=(b_i^{\alpha\beta})^T$，$\alpha\in I_i$，$\beta\in J_i$，$\mu\in I_j$，$\nu\in J_j$，$i,j=1(1)\tilde{N}$

$$a_{ij}^{\alpha\beta\mu\nu}=\lambda_i^{\alpha\beta}R_1G_1^{(0,\mu)}(x,x_j)R_2G_2^{(0,\nu)}(y,y_j)$$

$$b_i^{\alpha\beta}=F_i^{\alpha\beta}-\lambda_i^{\alpha\beta}s_1^*(x,y)$$

系数$\{c_j^{\mu\nu}\}_{j=\tilde{N}+1}^{\mathring{N}}$ $\mu\in I_j$，$\nu\in J_j$由对称线方程组 $\tilde{A}\tilde{c}=\tilde{b}$

决定。$\tilde{A}=(a_{i\ j}^{\alpha\beta\ \mu\nu})$，$b=(b_i^{\alpha\beta})^T$，$\alpha\in I_i$，$\beta\in J_i$，$\mu\in I_j$，$\nu\in J_j$，$i,j=\tilde{N}+1(1)\mathring{N}$.

$$a_{i\ j}^{\alpha\beta\ \mu\nu}=\lambda_i^{\alpha\beta}\tilde{R}_1G_1^{(0,\mu)}(x,x_j)\tilde{R}_2G_2^{(0,\nu)}(y,y_j)$$

$$b_i^{\alpha\beta}=F_i^{\alpha\beta}-\lambda_i^{\alpha\beta}s_2^*(x,y)$$

其中s_1^*,s_2^*分别表示(3)、(4)式右端前四个和式。

我们对$m=n=1$和$m=n=2$的情形拟合了某些函数。由边值问题(2)所决定的边界$\overline{cf}$上的条件恰为这些函数在$\overline{cf}$上应取的值。本方法适用于更一般的直角型区域，只需适当补充边界，将其分为若干个矩形域。

参 考 文 献

〔1〕 Li Yuesheng(李岳生), Multivariate Optimal Interpolation to Scattered Data Throughout A Rectangle I-With Continuous Boundary Conditions, CAT#55 *Center for Approximation Theory*, Department of Mathematics Texas A & M University, 1984.

〔2〕 G.Birkhoff, C.de Boor, Piecewise polynomial interpolation and approximation, *Approximation of Functions* (H. L. Garabedian, ed) pp. 164-190. Elsevier, Amsterdam and New York, 1965.

〔3〕 R.E.Carlson, C.A.Hall, *J.Approx. Theory*, 4(1971), 37-53.

〔4〕 Lois Mansfield, *SIAM J.Numer. Anal.* 8(1971), 115—126.

·学术动态·

东亚中第三纪以来古环境第二次国际会议在香港召开

东亚中第三纪以来古环境第三次国际会议，于1987年1月上旬在香港大学召开，参加会议的代表有来自中国、澳大利亚、法国、西德、荷兰、美国、加拿大、日本、南朝鲜、印度、尼泊尔、台湾和香港等国家和地区的70多名科学家，向大会提交的论文有75篇。会议集中讨论了东亚地区第三纪以来的地质、海岸变迁和海平面变化、古气候、古植物、古动物（包括古微生物）以及古人类等六个专题。我国参加会议的有中国科学院、中国地质科学院、国家地震局有关研究所，以及高等学校代表35人；我校代表张宏达教授、黄玉崑教授、夏法副教授，分别向大会宣读了“华夏植物群的起源和发展”、“华南沿海晚更新世以来的海面变化”、“海南岛北部晚新生代构造演化”和“湛江地区第四纪断块运动”4篇论文，得到与会者的好评。

会议自始至终是在友好和热烈的气氛中进行广泛深入的学术讨论和交流。

我校黄玉崑教授的“华南沿海晚更新世以来的海面变化”一文，引起了新华社香港分社记者的注意，并对其中的某些论点于1月13日专门向国外发了电讯。

为期四天的东亚古环境会议，是由香港大学亚洲研究中心发起的。

（夏 法）