1986年第2期 中山大学学报 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI No. 2, 1986

欧氏空间自映射零点的Merrill重复开始算法*

王则柯
(数学系)

摘　要

本文以欧氏空间自映射零点计算问题为背景，采用整数标号，改造了Merrill重复开始算法，使其程序实施变得简单，并且建立保证计算收敛的一个充分条件。

本文采用整数标号，将以集值映射不动点计算问题为背景采用向量标号提出的Merrill重复开始算法[2,3]，用于计算欧氏空间连续自映射的零点，使之成为非线性问题数值计算的容易实施的有效方法。

考虑欧氏空间自映射$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$的零点计算问题。我们将把问题放到$[0,1] \times \mathbf{R}^n$中解决。

一、单纯剖分和整数标号

单形及其面的概念是熟知的[1]，为本文讨论的方便，下面所有单形都指相对开的单形。$j+1$维单形的j维面特别称为界面。

定义1　称G为$[0,1] \times \mathbf{R}^n$的一个单纯剖分，如果$G$是$n+1$维单形的集合，$G$的所有单形的所有面分割$[0,1] \times \mathbf{R}^n$。这时，所有是$G$中单形的面的$j$维单形的集合记作$G^j$，称为$G$的$j$维骨架。

显然，$G^{n+1} = G$，而G^0是单纯剖分G的顶点的集合。

定理1　设G是$[0,1] \times \mathbf{R}^n$的单纯剖分，$\tau \in G^n$，则当$\tau \subset \{0,1\} \times \mathbf{R}^n$时，$\tau$只是$G$中一个单形的界面，当$\tau \not\subset \{0,1\} \times \mathbf{R}^n$时，$\tau$恰是$G$中两个单形的公共界面。

记$p: [0,1] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$为投射，$G$中单形$\sigma = \langle y^{-1}, \cdots, y^n \rangle$的投影直径定义为$\mathrm{diam}_p \sigma = \max_{-1 \leq i, j \leq n} \{\|p(y^i) - p(y^j)\|\}$，$G$的投影网径定义为$\mathrm{mesh}_p G = \sup_{\sigma \in G} \{\mathrm{diam}_p \sigma\}$。

本文1985年3月收到
* 本文的工作得到中山大学高等学术研究中心基金会的资助

定义2 设$h>0$,$h\mathbf{Z}^n$是$\mathbf{R}^n$的各分量均为h的整数倍的点的集合。若$y^{-1}\in\{0\}\times h\mathbf{Z}^n$,$\pi$是$N_0=\{0,\cdots,n\}$的一个置换，就记$k_1(y^{-1},\pi)=\langle y^{-1},\cdots,y^n\rangle$，这里$y^i=y^{i-1}+h_{\pi(i)}v^{\pi(i)}$，$i\in N_0$,其中$v^0,\cdots,v^n$是$\mathbf{R}^{n+1}$的$n+1$个标架向量,$h_0=1$,但$h_i=h$,$i\in N=\{1,\cdots,n\}$。最后,记所有这样的$k_1(y^{-1},\pi)$的集合为$K_1(h)$.

定理2 $K_1(h)$是$[0,1]\times\mathbf{R}^n$的一个单纯剖分，其投影网径$\mathrm{mesh}_pK_1(h)=\sqrt{n}\,h$。

定理3 设$\sigma=k_1(y^{-1},\pi)=\langle y^{-1},\cdots,y^n\rangle\in K_1(h)$,$\tau=\langle y^{-1},\cdots,y^{i-1},y^{i+1},\cdots,y^n\rangle$是$\sigma$的不在$\{0,1\}\times\mathbf{R}^n$的界面，则$K_1(h)$中唯一与$\sigma$共有界面$\tau$的单形$\sigma'=k_1(z^{-1},\mu)$可由转轴规则表(表1)确定。

表1

	z^{-1}	μ
$i=-1$	$y^{-1}+h_{\pi(0)}v^{\pi(0)}$	$(\pi(1),\cdots,\pi(n),\pi(0))$
$-1<i<n$	y^{-1}	$(\pi(0),\cdots,\pi(i-1),\pi(i+1),\pi(i),\pi(i+2),\cdots,\pi(n))$
$i=n$	$y^{-1}-h_{\pi(n)}v^{\pi(n)}$	$(\pi(n),\pi(0),\cdots,\pi(n-1))$

定理1，2，3的证明见Todd[1976]。

由定义2得下述引理：

引理1 $K_1^0(h)=\{0,1\}\times h\mathbf{Z}^n$,且$(0,x)\in K_1^0(h)$当且仅当$(1,x)\in K_1^0(h)$。设$h'/h$为整数，则$K_1^0(h')\subset K_1^0(h)$。

可见，对于同一个剖分$K_1(h)$,在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$的顶点与在$\{1\}\times\mathbf{R}^n$的顶点投影位置一致。另外，设两个$K_1(h)$型剖分的网径参数h是整数倍的关系，则较粗剖分的顶点都自动是较细剖分的顶点。

为行文方便，以下单形均专指$K_1(h)$中的元素($n+1$维单形)，常用σ表示，界面均专指$K_1(h)$中元素的n维界面，常用τ表示。

定义3 任意取定$c\in h\mathbf{Z}^n$,确定整数标号法$l:K_1^0(h)\to N_0$如下。设$y\in K_1^0(h)$，若$y=(1,x)$,则

$$l(1,x)=\begin{cases}0, & \text{若对所有}i\in N,\ x_i\leqslant c_i,\\ \min\{i\mid x_i>c_i\}, & \text{其它情形;}\end{cases}$$

若$y=(0,x)$，则

$$l(0,x)=\begin{cases}0, & \text{若对所有}i\in N,\ f_i(x)\leqslant 0,\\ \min\{i\mid f_i(x)>0\}, & \text{其它情形。}\end{cases}$$

定义4 称$\tau\in K_1^n(h)$为全标界面，如果它的$n+1$个顶点具有$0,\cdots,n$全部$n+1$种标号。称$\sigma\in K_1(h)$为全标单形，如果它有一个界面是全标界面。

全标单形的$n+2$个顶点具有$n+1$种标号0，…,n,故恰有一对顶点标号相同。所以，全标单形都恰有一对全标界面。

引理2　设$c\in h\mathbf{Z}^n$，取$y^{-1}=(0,c)$，$\rho=(0,\cdots,n)$，则$\sigma=k_1(y^{-1},\rho)=\langle y^{-1},\cdots,y^n\rangle$是$K_1(h)$中唯一有全标界面在$\{1\}\times\mathbf{R}^n$的全标单形，这个全标界面就是$\tau=\langle y^0,\cdots,y^n\rangle$。

证明　因$y^0=y^{-1}+h_{\rho(0)}v^{\rho(0)}=y^{-1}+h_0v^0=y^{-1}+v^0=(1,c)\in\{1\}\times\mathbf{R}^n$，$y^1,\cdots,y^n$都由$y^0$依次加上$hv^i$，$i\in N$而得，故$y^1,\cdots,y^n$的$t$坐标与$y^0$一样，得$\langle y^0,\cdots,y^n\rangle\subset\{1\}\times\mathbf{R}^n$。这时由标号法即知$l(y^i)=i$，$i\in N_0$，知$\langle y^0,\cdots,y^n\rangle$是位于$\{1\}\times\mathbf{R}^n$的全标界面。

反之，设τ是位于$\{1\}\times\mathbf{R}^n$的全标界面，则由$K_1(h)$的构造，必须$\tau\subset\{1\}\times[c_1,c_1+h]\times\cdots\times[c_n,c_n+h]$，$\tau$的顶点均具有$(1,c_1+\alpha_1h,\cdots,c_n+\alpha_nh)$的形状，其中$\alpha_i=0$或1。另一方面，由$K_1(h)$的构造，$\tau$的顶点都由某顶点先后加上$hv^1,\cdots,hv^n$而得。由此可知，标号为0的顶点必为$(1,c_1,\cdots,c_n)$，标号为1的顶点必为$(1,c_1+h,c_2,\cdots,c_n)$，前者就是$y^0=y^{-1}+v^0$，后者就是$y^1=y^0+hv^1$。这时，下一个顶点必须是$y^2=y^1+hv^2$，否则若下一顶点为$y^1+hv^i$，$i\geqslant 3$，则$\tau$将永远失去标号2的顶点。同样，再下一顶点必须是$y^3=y^2+hv^3$。如此做下去，得$\tau=\langle y^0,\cdots,y^n\rangle$。所以，$\tau=\langle y^0,\cdots,y^n\rangle$是位于$\{1\}\times\mathbf{R}^n$的唯一全标界面。

最后，据定理1，$k_1(y^{-1},\rho)$是唯一以τ为界面的单形，所以是唯一有全标界面在$\{1\}\times\mathbf{R}^n$的全标单形。引理得证。

二、算　法

定义5　以$K_1(h)$中的全标单形为节点，两节点连接当且仅当它们有公共的全标界面，得到图Γ。设$\sigma\in\Gamma$，定义节点σ的度数$\#(\sigma)$为图Γ中与σ连接的节点的数目。

引理3　设$\sigma\in\Gamma$，则当σ有全标界面在$\{0,1\}\times\mathbf{R}^n$时$\#(\sigma)=1$，否则，$\#(\sigma)=2$。

证明　记σ的两个全标界面为τ'和τ''。

首先，不可能τ'和τ''同在$[0,1]\times\mathbf{R}^n$的边界$\{0,1\}\times\mathbf{R}^n$上：同属于$\{0\}\times\mathbf{R}^n$或同属于$\{1\}\times\mathbf{R}^n$将导致$\sigma$的顶点仿射相关的矛盾，分别属于$\{0\}\times\mathbf{R}^n$和$\{1\}\times\mathbf{R}^n$将导致$\sigma$有$2(n+1)$个顶点的矛盾。

若$\tau'\subset\{0,1\}\times\mathbf{R}^n$，由定理1，$K_1(h)$中只有$\sigma$以$\tau'$为界面，故没有与$\sigma$共有全标界面$\tau'$的单形。若$\tau'\not\subset\{0,1\}\times\mathbf{R}^n$，由定理1，$K_1(h)$中唯一地有单形（记作）$\sigma'$与$\sigma$共有全标界面$\tau'$，这时$\sigma'$是与$\sigma$连接的节点。

对τ''，有完全一样的结论。

最后，注意τ'和τ''顶多有一个位于$\{0,1\}\times\mathbf{R}^n$，就知：若$\tau'$和$\tau''$之一在$\{0,1\}\times\mathbf{R}^n$，$\#(\sigma)=1$，否则，$\tau'$和$\tau''$都不在$\{0,1\}\times\mathbf{R}^n$，得$\#(\sigma)=2$。证毕。

定理4　设$c\in h\mathbf{Z}^n$，$k_1(y^{-1},\rho)$如引理2，则图Γ中有一个连通分支是以$k_1(y^{-1},\rho)$为一端的简单路径，若该分支有限，则另一端是有全标界面在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$的全标单形。

证明　注意由引理3，节点成为图Γ的分支的端点当且仅当它有一个全标界面在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$或$\{1\}\times\mathbf{R}^n$，定理立得。

定理中的$k_1(y^{-1},\rho)$是一个人为的端点。以它为出发点，沿图Γ的连通分支走，就是算法的思想。

算法

步0　取定正整数序列$m_1<m_2<\cdots$，使得对$k\in N$，m_{k+1}/m_k是整数。令$y^{+}_{1,1}=(0,0)$，置

$k:=1$, $\nu:=1$.

步1 令 $x^+_{k,1}=p(y^+_{k,1})$,若$\|f(x^+_{k,1})\|$足够小,取$x^+_{k,1}$为f的数值零点,停机。否则,取$[0,1]\times\mathbf{R}^n$的$K_1(m^{-1}_k)$剖分,在定义3中取$c=x^+_{k,1}$令$y^{-1}=y^+_{k,1}$, $\sigma_{k,1}=k_1(y^{-1},(0,\cdots,n))$。

步2 计算$l=l(y^+_{k,\nu})$,记$\sigma_{k,\nu}$的另一个标号为l的顶点为$y^-_{k,\nu}$。若$\sigma_{k,\nu}$的与$y^-_{k,\nu}$相对的界面在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$,则令$y^+_{k+1,1}=y^{-1}$,置$k:=k+1,\nu:=1$,回步1。否则,设在$\sigma_{k,\nu}=k_1(y^{-1},\pi)=\langle y^{-1},\cdots,y^n\rangle$中$y^-_{k,\nu}=y^i$,按定理3的转轴运算规则,得到$\sigma_{k,\nu+1}=k_1(z^{-1},\mu)$,记其不是$\sigma_{k,\nu}$顶点的唯一顶点为$y^+_{k,\nu+1}$置$\nu:=\nu+1$,回步2。

注记 同一个符号$k_1(z,\pi)$在不同的$K_1(h)$中表示不同的单形,并不会引起混淆。

为确定起见,算法中步0都取$y^+_{1,1}=(0,0)$作计算的出发点。但由引理2知,只要$c\in m^{-1}_1\mathbf{Z}^n$,就可取$y^+_{1,1}=(0,c)$。定理4保证了算法的可行性。事实上,从$k_1(y^{-1},(0,\cdots,n))$开始的计算,只要未到达有全标界面在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$的全标单形,就将一直进行下去。如果找到了有全标界面在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$的全标单形,则据引理1,以这个全标单形的带头顶点y^{-1}为新的出发点,计算将在较精细的剖分中继续进行。如此一轮一轮重复开始,计算将一直进行下去。

然而,不同的计算出发点$y^+_{1,1}$可能导致不同的计算结果。一是收敛不收敛,二是收敛到这个零点还是那个零点,三是收敛到同一个零点的不同的计算成本。事实上,当对$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$没有要求或只要求连续时,是不能指望一般的计算收敛性保证的。所以,在算法中应当设置保护性出口,例如置定正整数ν_0,当$\nu=\nu_0$时,就停止计算。

三、收 敛 性 讨 论

本节将建立保证计算收敛的一个充分条件。

定理5 设$f,g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$连续,$g(\mathbf{R}^n)\subset\mathbf{R}^n$有界,$f(x)=x+g(x)$,那末,不论如何选取使得诸$m_{k+1}/m_k$均为整数的正整数序列$m_1<m_2<\cdots$和符合$(0,c)\in K^0_1(m^{-1}_1)$的$y^+_{1,1}==(0,c)$,按算法得到的计算点列$\{x^+_{k,1}\}$有子序列收敛到$f$的一个零点。

下面将通过引理来证明上述主要定理。

记$r_i=\min\{c_i,\inf_{x\in R^n}g_i(x)\}$,$R_i=\max\{c_i,\sup_{x\in R^n}g_i(x)\}$,$i=1,\cdots,n$,记$\prod=[0,1]\times[r_1-2,R_1+2]\times\cdots\times[r_n-2,R_n+2]$,$\prod_k=[0,1]\times[r_1-\delta_k,R_1+\delta_k]\times\cdots\times[r_n-\delta_k,R_n+\delta_k]$,$\delta_k=\Sigma^{k-1}_{p=0}2^{-p}$。易见,$\prod_1\subset\prod_2\subset\cdots\subset\prod\subset[0,1]\times\mathbf{R}^n$。

引理4 全标单形都在$\prod$内。

证明 先对$K(m^{-1}_1)$进行讨论。

设τ是全标界面，则据标号法，τ的$n+1$个顶点分别被$x-c$或$x+g(x)$送到$\mathbf{R}^n$的$n+1$个由$n-1$维坐标超平面界定的区域$\{x_i\leqslant 0,i\epsilon N\}$，$\{x_1>0;x_i\leqslant 0,i>1\}$，$\{x_2>0;x_i\leqslant 0,i>2\}$，…，$\{x_{n-1}>0,x_n\leqslant 0\}$，$\{x_n>0\}$。由此可见，$\mathbf{R}^n$的每个$n-1$维坐标超平面$\{x_i=0\}$的两侧半空间$\{x_i\leqslant 0\}$和$\{x_i\geqslant 0\}$都有$\tau$的顶点的象，$x-c$象或$x+g(x)$象。

如果τ有一个顶点在$\prod_1$外，因$m_1\geqslant 1$，同一单形任二顶点各分量之差均不超过m_1^{-1}，更不超过1，就至少有一个$i\epsilon N$使τ的每个顶点y都符合$p_i(y)<r_i$或都符合$p_i(y)>R_i$，这样，就都有$p_i(y)-c_i<0,p_i(y)+g_i(p(y))<0$或都有$p_i(y)-c_i>0,p_i(y)+g_i(p(y))>0$，于是$\{x_i\leqslant 0\}$和$\{x_i\geqslant 0\}$之一没有$\tau$的顶点的$p(y)-c$象和$p(y)+g(p(y))$象，所以$\tau$不是全标界面。

由此可见，$K_1(m_1^{-1})$的全标界面都在$\prod_1$内，而全标单形是由它的两个全标界面张成的，故全标单形都在$\prod_1$内。但$K_1(m_1^{-1})$在$\prod_1$内单形数目有限，故对$K_1(m_1^{-1})$按定义5得到的图Γ_1的节点数目有限，因此据定理4，$K_1(m_1^{-1})$中的计算必在有限步内因得到有全标界面在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$的全标单形$k_1(y^{-1},\pi)$而结束，这时得到$y_{2,1}^+=y^{-1}$，当然$y_{2,1}^+\epsilon\prod$。

对$K_1(m_2^{-1})$重复上述讨论，因$y_{2,1}^+\epsilon\prod_1$，$m_2\geqslant 2$，同一单形任二顶点的投影的各分量之差均不超过2^{-1}，得$K_1(m_2^{-1})$的全标单形都在$\prod_2$内，$y_{3,1}^+\epsilon\prod_2$。

如此继续下去，注意必有$m_k\geqslant 2^{k-1}$及$\prod_k$的构造就得：对每个$k\epsilon N$，$K_1(m_k^{-1})$的全标单形都在$\prod_k$内。所以，所有全标单形都在$\prod$内。引理得证。

因$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$连续，故在$p(\prod)$一致连续，任给$\varepsilon>0$，有$h>0$，使得$x,x'\epsilon p(\prod)$和$|x_i-x_i'|\leqslant h$，$i\epsilon N$蕴涵$|f_i(x)-f_i(x')|\leqslant\varepsilon/\sqrt{N}$，$i\epsilon N$。

引理5　设ε,h如上，$m_k\geqslant 1/h$，$k_1(y^{-1},\pi)=\langle y^{-1},\cdots,y^n\rangle$是$K_1(m_k^{-1})$的有全标界面在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$的全标单形，$x=p(y^{-1})$，那末，$\|f(x)\|\leqslant\varepsilon$。

证明　由$K_1(m_k^{-1})$的构造，易知$\tau=\langle y^{-1},\cdots,y^{n-1}\rangle$就是$k_1(y^{-1},\pi)$在$\{0\}\times\mathbf{R}^n$的全标界面。如果$l(y^i)=j$，就令$z^j=y^i$，$j\epsilon N_0$。这样就得到$\tau$的新的表示$\tau=\langle z^0,\cdots,z^n\rangle$，符合$l(z^j)=j,j\epsilon N_0$。据标号法，就有

$$f_i(p(z^i))>0,\ j\epsilon N,$$
$$f_i(p(z^0))\leqslant 0,\ i\epsilon N.$$

所以，当$i\epsilon N,j\epsilon N_0$时，有

$$f_i(p(z^j))=f_i(p(z^j))-f_i(p(z^i))+f_i(p(z^i))>-\varepsilon/\sqrt{n},$$
$$f_i(p(z^j))=f_i(p(z^j))-f_i(p(z^0))+f_i(p(z^0))\leqslant\varepsilon/\sqrt{n}$$

从而　$|f_i(p(z^j))|\leqslant\varepsilon/\sqrt{n}$。故对所有$j\epsilon N_0$，

$$\|f(p(z^j))\|=(\textstyle\sum_{i=1}^n|f_i(p(z^j))|^2)^{1/2}\leqslant\varepsilon.$$

因$\tau=\langle y^{-1},\cdots,y^{n-1}\rangle=\langle z^0,\cdots z^n\rangle$，特别地对$x=p(y^{-1})$有

$\|f(x)\| \leqslant \varepsilon$.　　引理得证。

定理5的证明　由引理4及其证明，按算法依次在每个$K_1(m_1^{-1})$, $K_1(m_2^{-1})$, …中进行的计算必在有限步内因得到$x^+_{2,1}$, $x^+_{3,1}$，…而结束，由此得到无穷序列$\{x^+_{k,1}\}$。注意$\{x^+_{k,1}\} \subset p(\Pi)$，而$p(\Pi)$紧，故$\{x^+_{k,1}\}$在$p(\Pi)$中必有一个聚点$x^*$。

据引理5，$\lim\limits_{k\to\infty} f(x^+_{k,1}) = 0$，结合$f$的连续性和$p(\Pi)$的紧致性，就得$f(x^*) = 0$。

定理5至此得证。

定理5也可以叙述为：设$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$符合定理5的条件，则对任何正数$\varepsilon$，按本文算法进行的计算必在有限步内得到一点$x$使得$\|f(x)\| < \varepsilon$。

参考文献

〔1〕 江泽涵，拓扑学引论，上海科技出版社，1978.

〔2〕 Merrill, O.H., 1972, *Applications and Extensions of an Algorithm that Computes Fixed Points of a Certain upper Semi-continuous Point to Set Mapping*, Univ. of Michigan.

〔3〕 Todd, M. J., *The Computation of Fixed Points and Applications*, 1976, Springer-Verlag.

An Integer Labelling Version of Merrill's Restart Algorithm and Discussions on Convergence

Wang Zeke

Abstract

A variation of Merrill's restart algorithm is presented to compute zeroes of continuous self-mappings of Euclidean spaces. Discussions on computational convergence are developed.