1988年第1期 中 山 大 学 学 报 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI No. 1, 1988

双曲型黎曼曲面上解析动力系统的周期点*

侯纪欣
（数学系）

摘　要

本文讨论双曲型黎曼曲面上解析动力系统周期轨道的存在性及周期点的个数。

关键词　双曲型黎曼曲面，非欧度量，解析动力系统，周期轨道

本文将使用如下记号：

$\mathscr{R}$是一个双曲型黎曼曲面，

f：$\mathscr{R}\to\mathscr{R}$是全纯映照。

$$\{f_n:n=0,1,2,\cdots\} \tag{1}$$

是f生成的解析动力系统，其中

$f_0=Id$（恒等映照）。

$f_{n+1}=f\circ f_n$，　$(n=0,1,2,\cdots)$。

对任一$p\in\mathscr{R}$，$O^+(p)=\{p_n:n=0,1,2,\cdots\}$称为$p$的轨道，其中

$p_0=p$，

$p_{n+1}=f(p_n)=f_{n+1}(p)$，　$(n=0,1,2,\cdots)$。

若有正整数m使$p_m=p_0$，而当$0<j<m$时，$p_j\neq p_0$，则$\{p_n\}$称为系统(1)的周期轨道，p称为m阶周期点。

(Δ,Π)是$\mathscr{R}$的万有覆盖曲面，其中$\Delta=B(0;1)$是$\mathbf{C}$上的单位圆盘，$\Pi:\Delta\to\mathscr{R}$是投影映照。

本文需要下列几个引理：

引理 1　存在全纯函数$\tilde{f}:\Delta\to\Delta$，使有如下图表：

本文1986年10月收到

* 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\Pi"'] & \Delta \arrow[d, "\Pi"] \\ \mathscr{R} \arrow[r, "f"] & \mathscr{R} \end{tikzcd}$$

证明　取固定点$q\in\mathscr{R}$以及$a\in\Pi^{-1}(q)$，$b\in\Pi^{-1}(f(q))$按下述方法定义函数$\tilde{f}$：对任一$z\in\Delta$，作自a到z的曲线$\tilde{\gamma}$：$[0,1]\to\Delta$，则曲线$f\circ\Pi\circ\tilde{\gamma}$在$\Delta$上有唯一的以$b$为起点的提升$\tilde{\Gamma}$：$[0,1]\to\Delta$。令$\tilde{f}(z)=\tilde{\Gamma}(1)$。

由$\tilde{f}$的定义可知，$\tilde{f}:\Delta\to\Delta$连续且满足$f\circ\Pi=\Pi\circ\tilde{f}$，即有上述图表。并且$\tilde{f}(a)=b$。根据映照提升的唯一性，$\tilde{f}$是唯一满足$\tilde{f}(a)=b$的$f\circ\Pi$关于$\Pi$的提升[1]。又因$\Pi$是局部同胚的全纯映照，而$f\circ\Pi$为全纯映照，故$\tilde{f}$是全纯映照。□

引理1中的函数$\tilde{f}$称为f的共轭映照。

根据Schwarz引理，f的共轭映照$\tilde{f}$只可能属于下述两种情形之一[2]：或者$\tilde{f}$保持Δ上曲线的非欧长度不变，这时记$f\in P$；或者$\tilde{f}$严格缩短曲线的非欧长度，这时记$f\in S$：当且仅当$\tilde{f}$是共形自映照，即$\tilde{f}$是把Δ映为自己的Möbius变换时，$f\in P$。

引理2　若$f\in S$，则下列说法等价：

(i)　$\exists q\in\mathscr{R}$，$\{q_n\}$有聚点$\alpha\in\mathscr{R}$。

(ii)　对$\forall p\in\mathscr{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\alpha$。

用f的共轭映照$\tilde{f}$：$\Delta\to\Delta$代替f，在双曲平面Δ上不难得出结论(i)，(ii)。（例如，可参考[3]）。由共轭关系易知在$\mathscr{R}$上引理2成立。

引理3　设$\mathscr{R}$为紧双曲型黎曼曲面，其亏格$g\geq2$。$f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$为共形映照，则$f$把$\mathscr{R}$上的Weierstrass点映为Weierst ass点且$\mathscr{R}$上所有Weierstrass点都是解析动力系统$\{f_n\}$的周期点。

证明　首先指出，若p是Weierstrass点，则$f(p)$也是Weierstrass点。

设$\{(V_p,\varphi_p)\}$是$\mathscr{R}$的复结构，其中V_p是点p的局部邻域，局部参数$\varphi_p:V_p\to\mathbf{C}$满足$\varphi_p(p)=0$。令$f(p)=w$，$U_w=f(V_p)$，$\phi_w=\varphi_p\circ f^{-1}$，则$\{(U_w,\phi_w)\}$也是$\mathscr{R}$的复结构，且$\phi_w(w)=0$。

若A表示$\mathscr{R}$上全体全纯微分所构成的复向量空间，设$\omega\in A$在局部坐标$z=\varphi_{p_0}(p)$下具有形式

$$\omega(p)=h(z)dz \tag{2}$$

若这样定义Ω：对$w_0=f(p_0)$，在U_{w_0}内，在局部参数$z=\phi_{w_0}(w)$下，Ω具有形式

$$\Omega(w)=h(z)dz \tag{3}$$

易知Ω也是全纯微分。

因此，任一$\omega\in A$由f对应一个$\Omega\in A$。用f^{-1}代替f重复上述讨论，可知在V_{p_0}内具有形式(2)的全纯微分与在U_{w_0}具有形式(3)的全纯微分是一一对应的，其中$w_0=f(p_0)$。若记$\mathscr{R}$在p_0的权为$\tau(p_0)$，则$\tau(p_0)=\tau(w_0)$。若p_0是Weierstrass点，则$\tau(p_0)>0$。从而$\tau(w_0)>0$，这说明$f(p_0)$也是Weierstrass点。

现在，容易看出，任一 Weierstrass 点都是 $\{f_n\}$ 的周期点。事实上$\mathscr{R}$上有且仅有有穷个 Weierstrass 点 $p^{(0)},p^{(1)},\cdots,p^{(s-1)}$ $(2(g+1)\leqslant s\leqslant g(g^2-1))$，因$f$是1－1的且把 Weierstrass 点映为 Weierstrass 点，故每一$p^{(i)}$必对应一个正整数$m_i(1\leqslant m_i\leqslant s)$使$f_{m_i}(p^{(i)})=p^{(i)}$，故$p^{(i)}$是$\{f_n\}$的周期点，其周期不大于$s$。□

定理 1 若$\mathscr{R}$是单连通的双曲型黎曼曲面，$f\in P, f\neq Id$，则f在$\mathscr{R}$上至多只有一个不动点，并且

（i） 若f在R上没有不动点，则系统(1)在$\mathscr{R}$上没有周期点，

（ii） 若f在$\mathscr{R}$上有一不动点p_0，则或者存在一个正整数$m>1$，使对所有$p\in\mathscr{R}$，$O^+(p)$有周期m，或者对所有$p\in\mathscr{R}-\{p_0\}$，$O^+(p)$都不是周期轨道。

证明 根据假设，$\Pi:\Delta\to\mathscr{R}$为共形同胚，f的共轭映照$\mathfrak{f}$是Möbius变换。因此，$f=\Pi\circ\mathfrak{f}\circ\Pi^{-1}$是一个双射，若$\Pi(z)=p$，则当且仅当$O^+(z)$是周期为$m$的周期轨道时，$O^+(p)$是系统(1)中周期为$m$的周期轨道。$\mathfrak{f}$在$\Delta$内至多只有一个不动点，故$f$至多只有一个不动点。并且，

（i） 若$\mathfrak{f}$在Δ的边界$\partial\Delta$上有两个不动点$e^{i\alpha}$，$e^{i\beta}$，则$\mathfrak{f}$在Δ内没有不动点。这时，$\mathfrak{f}$是一个非欧平移[4]

$$(\mathfrak{f}(z)-e^{i\alpha})/(\mathfrak{f}(z)-e^{i\beta})=\rho(z-e^{i\alpha})/(z-e^{i\beta}),\quad(\rho>0,\ \rho\neq1).$$

由归纳法得

$$(\mathfrak{f}_n(z)-e^{i\alpha})/(\mathfrak{f}_n(z)-e^{i\beta})=\rho^n(z-e^{i\alpha})/(z-e^{i\beta}).$$

因$\rho^n\neq1$，故$\mathfrak{f}_n(z)\neq z$ $(z\in\Delta, n=1,2,\cdots)$。因此系统(1)无周期点。

若$\mathfrak{f}$仅有一个不动点，且此不动点落在$\partial\Delta$上。设此点为$e^{i\alpha}$。这时，$\mathfrak{f}$是一个非欧极限旋转[4]

$$-ie^{i\alpha}/(\mathfrak{f}(z)-e^{i\alpha})=[-ie^{i\alpha}/(z-e^{i\alpha})]+b,\quad(b\text{为实数},\ b\neq0).$$

从而有

$$-ie^{i\alpha}/(\mathfrak{f}_n(z)-e^{i\alpha})=[-ie^{i\alpha}/(z-e^{i\alpha})]+nb\quad(n=1,2,\cdots).$$

可见，这时系统(1)无周期点。

(ii) 若$\mathfrak{f}$在Δ内有一不动点b，设$\Pi(b)=p_0$，则f只有一不动点p_0。$\mathfrak{f}$是一个非欧旋转[4]

$$(\mathfrak{f}(z)-b)/(f(z)-\frac{1}{\bar b})=e^{i\theta}(z-b)/(z-\frac{1}{\bar b})\quad(\theta\text{为实数},\theta\neq2k\pi,$$

$K=0,\pm1,\pm2,\cdots$）于是

$$(\mathfrak{f}_n(z)-b)/(\mathfrak{f}_n(z)-\frac{1}{\bar b})=e^{in\theta}(z-b)/(z-\frac{1}{\bar b}).$$

若$\theta=\frac{S}{m}\cdot2\pi$，$\frac{S}{m}$为既约分数，则

$$(\mathfrak{f}_m(z)-b)/(\mathfrak{f}_m(z)-\frac{1}{\bar b})=(z-b)/(z-\frac{1}{\bar b}),$$

即$\mathfrak{f}_m=Id$。因而对$\forall p\in\mathscr{R}$，$O^+(p)$都以m为周期。

若$\theta=2\pi\delta$，δ为无理数，则$\mathfrak{f}_n(z)\neq z(z\in\Delta-\{b\},n=1,2,\cdots)$。因此，(1)在$\mathscr{R}-\{p_0\}$没有周期点。□

现在讨论$f\in S$的情形。

定理 2　设$f\in S$,则下列说法等价:

(i)　f有不动点,

(ii)　$\exists q\in\mathscr{R}$,$\{q_n\}$有聚点$\alpha\in\mathscr{R}$,

(iii)　f有唯一不动点,

(iV)　$\{f_n\}$有周期轨道,

(V)　$\{f_n\}$有唯一周期轨道。

证明　只需指出(ii)$\Longrightarrow$(iii)。

若(ii)成立，则由引理2，对任一点p,$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(p_n)=\lim\limits_{n\to\infty}p_{n+1}=\alpha$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(p_n)=f(\alpha)$故$f(\alpha)=\alpha$。即$\alpha$是$f$的不动点，根据引理2，$f$的不动点是唯一的。

根据引理2及上述事实，定理的其它部分显然成立。　□

推论 1　若f有多于一个不动点，则$f\in P$.若又设$f\neq Id$，则$\mathscr{R}$是复连通的。

下一定理讨论当$f\in P$，$\mathscr{R}$是复连通的情形。在讨论中，$\mathscr{R}$以p为基点的基本群用记号$\pi_1(\mathscr{R},p)$表示，$\mathscr{I}_p$是$\pi_1(\mathscr{R},p)$中的单位元素，$\varDelta$上两点z_1,z_2间的非欧距离记作$[z_1,z_2]$。若$\mathscr{R}$上的曲线γ在$\varDelta$上的提升为$\tilde{\gamma}$，则曲线$\tilde{\gamma}$的非欧长度称为γ的双曲长度，用l_γ表示。因$\varDelta$覆盖$\mathscr{R}$的覆盖变换群是非欧运动群的子群，而曲线的非欧长度是非欧运动下的不变量，所以这样的定义是合理的。

下面提到的曲线，均指有有限的双曲长度的曲线。

定理 3　设$\mathscr{R}$是复连通的双曲型黎曼曲面，$f\in P$。若$\{f_n\}$在$\mathscr{R}$上有一个m-周期点，则f必为共形映照且存在正整数K使$f_{mK}=Id$。

证明　设p为$\{f_n\}$的m—周期点。

因$f\in P$,f的共轭映照$\tilde{f}$是Möbius变换,

设$z_0\in\pi^{-1}(p)$,$\pi^{-1}(p)=\{z_j:j\in J\}$为离散集，故有$\pi^{-1}(p)-\{z_0\}$的非空有穷子集

$$A_1=\{z_{i1},z_{i2},\cdots,z_{it}\}$$

使当$z_{iK}\in A_1$时,

$$[z_{iK},z_0]=\min\{[z_j,z_0]:z_j\in\pi^{-1}(p)-\{z_0\}\}=d_0>0.$$

过$z_{iK}\in A_1$，可作唯一的连接z_0,z_{iK}的非欧直线段$\tilde{\gamma}_{iK}$,$\gamma_{iK}=\pi\circ\tilde{\gamma}_{iK}$是过点$p$的闭曲线，$l_{\gamma_{iK}}=d_0$，因此，$\mathscr{R}$上经过点$p$，其双曲长度为$d_0$的非零伦闭曲线的数目是有穷的。设这类曲线组成的集为

$$A=\{\gamma_j:j=1,2,\cdots,t\}$$

现设$\gamma_1:[0,1]\to\mathscr{R}$是$A$中一条曲线，$\tilde{\gamma}_1$是$\gamma_1$以$z_0$为起点的提升，满足$\tilde{\gamma}_1(1)=z_{i1}$。因$\gamma_1\notin\mathscr{I}_p$,故$z_{i1}\neq z_0$,另一方面，$\gamma_1^*=f_m\circ\gamma_1$是闭曲线，且$\gamma_1^*(0)=p$,若$\gamma_1^*\in\mathscr{I}_p$,则$\gamma_1^*$的提升是$\varDelta$内的闭曲线，即$f_m$的共轭映照$\tilde{f}_m$把非闭曲线$\tilde{\gamma}_1$映为闭曲线。但这与$\tilde{f}_m$是Möbius变换这一事实矛盾。故$\gamma_1^*\notin\mathscr{I}_p$。又因$f_m\in P$，故$l_{\gamma_1^*}=l_{\gamma_1}=d_0$，从而$\gamma_1^*=f_m\circ\gamma_1\in A$。

因A为有穷集，故对任一$\gamma_i\in A$，必有一正整数K_i使f_{mK_i}把$|\gamma_i|$映为自已，由于

$$f_{mK_i}(\gamma_i(0))=f_{mK_i}(\gamma_i(1))=p$$

及$f_{mK_i}\in P$，故对γ_i上任一点q，必有$f_{mK_i}(q)=q$，因此，有

$$f_{mK_i}=Id.$$

这说明存在正整数k使 $f_{mK}=Id$。

另外，对任两点$p_1,p_2\in\mathscr{R}$，若$f(p_1)=f(p_2)$，则$f_{mK}(p_1)=f_{mK}(p_2)$。由$f_{mK}=Id$得$p_1=p_2$，因而f是一个双射，从而是一个共形映照。 □

推论 2 设$\mathscr{R}$为紧双曲型黎曼曲面，$f\in P$，则当且仅当f为共形映照时，$\{f_n\}$有周期点。□

这一结论可由定理3及引理3立即得到。

推论 3 当且仅当f有不动点时$\{f_n\}$有周期点。

证明 只需证明若$\{f_n\}$有周期轨道，则f必有不动点。

对于$f\in S$及$f\in P$，$\mathscr{R}$为单连通的情形，由定理2，定理1及其证明已经得出上述结论。

若$\mathscr{R}$为复连通，$f\in P$，$\{f_n\}$有周期轨道，则根据定理3，f为共形映照，且存在正整数M使$f_M=Id$，因此，对任一$p\in\mathscr{R}$，f_M的共轭映照作出$\pi^{-1}(p)$到自身的一一映照。取定一点$q\in\mathscr{R}$及$z_0\in\pi^{-1}(q)$，我们总可以选择f的共轭函数$\tilde{f}$使$\tilde{f}_M(z_0)=z_0$。于是有

$$\tilde{f}_M=Id, \tag{4}$$

但另一方面，$\tilde{f}:\Delta\to\Delta$是非欧运动，当且仅当$\tilde{f}$是由下列形式

$$(\tilde{f}-b)/(\tilde{f}-\frac{1}{\bar{b}})=e^{i2\pi\frac{r}{M}}(z-b)/(z-\frac{1}{\bar{b}})\quad(b\in\Delta,\ \frac{r}{M}\text{为既约分数})$$

确定的非欧旋转时，(4)式成立。这时，令$\pi(b)=p_0$，则p_0是f的不动点。 □

最后，讨论紧双曲型黎曼曲面上周期点的个数。

定理 4 设$\mathscr{R}$是亏格为g的紧双曲型黎曼曲面，$f\in P$。若$\{f_n\}$有周期轨道，M是满足$f_M=Id$的最小正整数，$M>1$。则对满足$1\leq m<M$的整数m，$\{f_n\}$的m阶周期点的个数不大于$2(g+1)$。

证明 定理3已指出，满足$f_M=Id$的最小正整数M存在。现讨论$M>1$的情形。

因$\mathscr{R}$是紧的，故其亏格$g\geq2$。$\mathscr{R}$上必有且仅有有穷个Weierstrass点。另外，因$f\neq Id$，故可取$p_0\in\mathscr{R}$使p_0既不是f的不动点也不是Weierstrass点。

对$n\in$N，令

$\Omega(np)=\{\omega:\omega$是$\mathscr{R}$上以$p$为零点的全纯微分，零点重数$\geq n\}$，

$\mu(-np)=\{w:w$是仅以p为极点的亚纯函数，极点重数$\leq n\}$，

若复向量空间$\Omega(np)$和$\mu(-np)$的维数分别为$\dim\Omega(np)$和$\dim\mu(-np)$，则由Riemann-Roch定理，有

$$\dim\mu(-np)=\dim\Omega(np)+n-g+1.$$

因p_0不是Weiersfrass点，故$\dim\Omega(gp)=0$，从而$\dim((g+1)p)=0$根据Riemann-Roch定理，得

$$\dim\mu(-(g+1)p_0)-\dim\mu(-gp_0)=1.$$

这说明存在仅以p_0为$(g+1)$重极点而无其它极点的亚纯函数，设

$$h:\mathscr{R}\to\overline{C}$$

是满足此条件的一个函数，令

$$H(p)=h(p)-h(f(p)),$$

则$H:\mathscr{R}\to\overline{C}$为亚纯函数，因$f^{-1}(p_0)\neq p_0$，故$H$仅以$p_0$和$f^{-1}(p_0)$为$(g+1)$重极点而无其它极点。故$H$在$\mathscr{R}$上有且仅有$2(g+1)$个零点。换句话说，有且仅有$2(g+1)$个点满足

$$h(p)=h(f(p)),$$

这说明f的不动点的个数不大于$2(g+1)$。

因此，对任一满足$1\leqslant m<M$的正整数m，f_m的不动点数不大于$2(g+1)$，从而系统$\{f_n\}$的m阶周期点的个数不大于$2(g+1)$。 □

参考文献

〔1〕 Forster, O., Lectures on Riemann Surfaces, Translated by Gilligan.

〔2〕 Ahlfors, L. V., *Conformal Invariants*, McGraw-Hill Book Company Press, 1973.

〔3〕 Burckel, R., *Amer. Math. Monthly*, 88 (1981), 396—407.

〔4〕 Springer, G., *Introduction to Riemann Surfaces*, Addision-Wesley Publishing Company, 1957.

Periodic Points of Analytical Dynamical Systems on Hyperbolic Riemann Surfaces

Hou Jixin

Abstract

The existance of periodic orbits and the numbers of periodic points in analytical dynamical systems on hyperbolic Riemann surfaces are discussed in this paper.

Keywords Hyperbolic Riemann surface, Noneuclidean measure, Analytical dynamical system, Periodic orbit