中 山 大 学 学 报

1986年第3期　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№. 3，1986

关于Galois扩张理论中F.R.DeMeyer的一个定理

马麟滚　（中山大学数学系）

司徒子治　（美国伯莱里大学数学系）

摘　要

本文证明了Galois扩张理论中F.R.DeMeyer的一个定理的逆定理；并从证明的过程中可见，条件R^G在C^G上是Azumaya的可以换为交叉积$\Delta(R,G)$在C^G上是Azumaya的。另外，还获得了$C[U_1,\cdots,U_n]$的可分子代数的某种结构，这里的$\{U_i\}$是$\Delta(R,G)$的标准自由基。

§1 准　　备

本文自始至终，R是一有单位元1的环，R的子环均与R有相同的单位元，G是R的阶为n的自同构群，C为R的中心，$R^G=\{r\in R|\sigma(r)=r,\ \forall\sigma\in G\}$、$C^G=R^G\cap C$，$\Delta(R,G)$是$R$与$G$带平凡因子系的交叉积。

R称为其子环S上的一个可分扩张，如果存在$\{x_i,y_i\in R|i=1,2,\cdots,l\}$对某正整数$l$，使得

$$\sum_{i=1}^{l}x_iy_i=1,\quad \sum_{i=1}^{l}xx_i\otimes y_i=\sum_{i=1}^{l}x_i\otimes y_ix,\qquad \forall x\in R.$$

这里的$\otimes$是张量积$\otimes_S$.

S上的可分扩张R称为可分的S-代数，如果$S\subset C$。

特别，当$S=C$时，可分的S-代数R称为Azumaya S-代数。

R称为其子环S上的Galois扩张，Galois群是G，如果

(i) $S=R^G$；

(ii) 存在$\{c_i,d_i\in R|i=1,2,\cdots,m\}$对某正整数$m$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}c_id_i=1,\ \sum_{i=1}^{m}c_ig_i(d_i)=0\quad \forall 1\neq g_i\in G.$$

本文1985年6月收到

R^G上的Galois扩张R称为中心的扩张，如果$R=CR^G$。

设B是代数A的子代数，我们叫

$$Z(B)=\{a\in A|ab=ba\quad\forall b\in B\}$$

为B在A中的换位子。

环R上的Kanzaki假设是指：R是C上的 Azumaya 代数，使得C是C^G上的Galois扩张，Galois群导自G且同构于G。

§2 正　　文

F.R.DeMeyer证明了下述定理（〔1〕引理２）：

如果R满足Kanzaki 假设，则R^G是C^G上的 Azumaya 代数，而且 R 是 R^G 上的一个Galois与中心的扩张。

下面将证明上述定理的逆定理．首先在较弱的条件下证明一个引理：

引理１　如果R是R^G上的Galois扩张，R^G在C^G上是有限生成投射与可分的，则

（１）$\Delta(R,G)$在C^G上是可分的；

（２）$\Delta(R,G)$与$(R^G)^0$都是Azumaya代数$\mathrm{Hom}_{C^G}(R,R)$中的换位子可分子代数，这里的$(R^G)^0$是R^G的反代数。

证明　由于R在C^G上是有限生成投射与忠实，所以$\mathrm{Hom}_{C^G}(R,R)$在C^G上是Azumaya的(〔2〕，命题4.1)。

由于R在R^G上是Galois的，所以$\{g_1,\cdots,g_n\}(=G)$在R上是线性无关的（〔6〕.引理3.1）。从而通过下述映射α，可将$\Delta(R,G)$嵌入$\mathrm{Hom}_{C^G}(R,R)$：

$$(\alpha(\sum r_iU_i))(r)=\sum r_ig_i(r)\qquad\forall r_i,r\in R.$$

这里的$\{U_i\}$是$\Delta(R,G)$的标准自由基。

还有，容易证明，作为C^G-代数，

$$(R^G)^0\cong\{f_r\in\mathrm{Hom}_{C^G}(R,R)\,|\,f_r(t)=tr\quad\forall r\in(R^G)^0,\qquad\forall t\in R.\}$$

但R是R^G上的Galois扩张，所以

$$\Delta(R,G)\cong\mathrm{Hom}_{R^G}(R,R)$$

（〔1〕定理１），这同构于$(\mathrm{Hom}_{C^G}(R,R))^{(R^G)^0}(=Z((R^G)^0)$，在$\mathrm{Hom}_{C^G}(R,R)$中)

按假设，由于R^G在C^G上是可分的，所以$(R^G)^0$也然。因此，$\Delta(R,G)$ 在C^G上也是一个可分的子代数，使得$\Delta(R,G)$与$(R^G)^0$都是换位子子代数（〔2〕,定理4.3）。

引理２　如果R是R^G上的Galois与中心的扩张，R^G在C^G上是Azumaya的，则C在C^G上是Galois的，Galois群G/C导自G且同构于G。

证明　由于$R=CR^G$，所以G/C的阶等于G的阶$(=n)$，$G/C\cong G$。由于R^G在C^G上是Azumaya的,所以$(R^G)^0$在C^G上也是Azumaya的。从而由引理１与Azumaya代数的换位子定理(〔2〕，定理4.3)，我们得出$\Delta(R,G)$在C^G上也是Azumaya的。再次，$R=CR^G$，故直接验证可得

$$Z(R^G)=C[U_1,\cdots,U_n]=\Delta(C,G/C),$$

这里的$R^G\cong R^GU_1$($g_1=G$的单位元)，从而由换位子定理，$\Delta(C,G/C)$是Azumaya 的（因

R^G是）。因此，C在C^G上是Galois的，Galois群为G/C $(\cong G)$。（〔3〕.定理2）.

引理3 如果$\Delta(R,G)$在C^G上可分，则R在C上是Azumaya的.

证明 由于$\Delta(R,G)$在C^G上可分，所以它在$\Delta(R,G)\otimes(\Delta(R,G))^0$上是左投射的（〔2〕命题1.1），这里$\otimes$是$C^G$上的，但$\Delta(R,G)$是自由的左$R$-摸$(R\cong RU_1)$，所以$\Delta(R,G)\otimes(\Delta(R,G))^0$在$R\otimes R^0$上是左投射，从而$\Delta(R,G)$在$R\otimes R^0$上是左投射的，注意到$R$是$\Delta(R,G)$作为左$R\otimes R^0$-模的直和项，我们就推得$R$在$R\otimes R^0$上是左投射的，因此$R$在$C^G$上是可分的(〔2〕,命题1.1)，所以$R$在$C$上是Azumaya的(〔2〕,定理3.8)。

由引理2与3，我们有

定理4 如果R在R^G上是Galois与中心的扩张，R^G在C^G上是Azumaya的，则R满足Kanzaki假设。

注意R上的Kanzaki假设蕴含$\Delta(R,G)$在C^G上是Azumaya的，那么，对本节的上述工作稍作修改，我们就有

定理5 如果R在R^G上是Galois与中心的扩张，$\Delta(R,G)$在C^G上是Azumaya的，则R满足Kanzaki假设。

我们也注意R上的Kanzaki假设蕴含：R的包含R^G的可分子代数的集合与C的包含C^G的可分子代数的集合之间存在一个一一对应关系，（〔2〕,引理2）。这就引导我们在$\Delta(R,G)$的包含R^G的可分子代数的集合与$\Delta(C,G/C)$的可分子代数的集合之间建立一个一一对应关系，并从而获得$\Delta(C,G/C)$的可分子代数的结构。

定理6 保持定理4的条件，则$\Delta(R,G)$的包含R^G的可分子代数的集合与$\Delta(C,G/C)$的可分子代数的集合之间存在一一对应关系。

证明 我们已经知道，$\Delta(R,G)$是Azumaya C^G-代数，R^G与$\Delta(C,G/C)$是其Azumaya换位子子代数，因此从Azumaya代数的换位子定理便得到本定理。

推论7 设S是$\Delta(C,G/C)$的包含C的可分子代数，则存在R的包含R^G的可分子代数T，使得

$$S=\sum(Ann_C(T_i))U_i,$$

这里的$Ann_C(T_i)$是T_i在C中的零化子，$T_i=\{t-g_i(t)\mid t\in T\}\ \forall_i$。

证明 由定理6，我们有$Z(C)=R$，这里，在$\Delta(C,G/C)$中，$C=CU_1$ 又$S=Z(T)$，对R的某个包含R^G的可分子代数T，使得

$$S=Z(T)=\{\sum r_iU_i\mid r_i\in C,\ t(\sum r_iU_i)=(\sum r_iU_i)t,\ \forall t\in R\}$$ 等价地，即

$$r_i(t-g_i(t))=0\quad \forall t\in T,\ \forall i$$

从而本推论成立。

参考文献

〔1〕F.R.DeMeyer, Some notes on the General Galois theory of rings, *Osaka J. Math.* 2 (1965), 117-127.

〔2〕F.R.DeMeyer and E. Ingraham, *Lecture notes in Math.*, 181 (1971), Springer-Verlag, Berlin-Haidelberg-New York.

[3] S. Ikehata, *Okayama J. Math.*, 23 (1981), 17-18.
[4] T. Kanzaki, *Osaka J. Math.*, 1 (1964), 103-115.
[5] MaLinjun and G. Szeto, 中山大学学报(自然科学版),1984, 4, 10—16.
[6] G. Szeto, *Bull. Belgian Math. Soc.* (Series B), XXXV (1983), 189—197.
[7] G. Szeto and Y. F. Wong, *J. Austral. Math. Soc.* (Serier A), 34 (1983), 394-398.

On a Theorem of F. R. DeMeyer for Galois Extensions

Ma Linjun

(Department of Mathematics
Zhongshan University,
The People's Republic
of China)

George Szeto

(Department of Mathematics
Bradley University,
U.S.A.)

Abstract

Let R be a ring with 1 and with an automorphism group G of order n for Some integer n, C the Center of R, and $R^G=\{r\epsilon R\,|\,\sigma(r)=r\ \forall\sigma\epsilon G\}$ the subring of fixed elements under G, $C^G=R^G\cap C$. Under the Kanzaki hypothesis on R that R is Azumaya over C such that C is Galois over C^G with Galois group induced by and isomorphic with G, F.R. DeMeyer showed that

(1) R^G is Azumaya over C^G, and

(2) R is a Galois and central extension over R^G (that is, R is Galois and $R=CR^G$ over R^G. ([1] lemma 2)

The main results of this paper showed that the converse of the above theorem is true. Moreover, from our proof, the condition that R^G is Azumaya over C^G can be replaced by the condition that the crossed product $\Delta(R,G)$ is Azumaya over C^G. We also found a structure of the separable subalgebras of $C[U_1,\cdots,U_n]$, where $\{U_i\}$ is a standard free basis for $\Delta(R,G)$.