中山大学学报
1986年第3期　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№. 3, 1986

·研究简报·

一类常微分算子Green函数的递推关系

许[illegible]生
（计算机科学系）

1．微分算子的递推关系

给定〔a, b〕区间上的函数组 $\left\{\varphi_i(x)\right\}_{i=1}^m$，$\varphi_i(x)\in C^m$〔$a$, b〕，$i=1,2,\cdots,m$. 且

$$W(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_i(x))\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{1.1}$$

其中 $W(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_i(x))$ 表示函数组 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_i(x)$ 的 Wronsky 行列式. 由 $\left\{\varphi_i(x)\right\}_{i=1}^m$ 可以定义线性微分算子

$$l_i f=\frac{W(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_i(x),f(x))}{W(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_i(x))},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m, \tag{1.2}$$

并规定 $l_0 f=f(x)$. 其中 $f(x)\in C^m[a,\ b]$.

定理 1　设 $\left\{\varphi_i(x)\right\}_{i=1}^m\subset C^m[a,\ b]$ 且满足条件(1.1)，则 $l_m=(D-a(x))l_{m-1}$,

$$\tag{1.3}$$

其中 l_m 和 l_{m-1} 按(1.2)式定义，而

$$a(x)=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(l_{m-1}\varphi_m(x)\right)}{l_{m-1}\varphi_m(x)}. \tag{1.4}$$

证明　由 l_m 和 l_{m-1} 的定义(1.2)知，l_m 和 l_{m-1} 的最高阶项系数均为 1，令

$$L_m=(D-a(x))l_{m-1},$$

不难看出，L_m 是最高阶项系数为 1 的 m 阶线性微分算子，为证 $l_m=L_m$，仅需证明 l_m 和 L_m 具有相同的基解组 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)$.

显然，$l_m\varphi_i=l_{m-1}\varphi_i=0$，$i=1,2,\cdots,m-1$,

所以，$l_m\varphi_i=L_m\varphi_i=0$，　$i=1,2,\cdots,m-1$. 又

$$L_m\varphi_m=(D-a(x))l_{m-1}\varphi_m,$$

$l_{m-1}\varphi_m\neq 0$，故函数 $a(x)$ 有意义. 因而

本文1985年1月收到

$$L_m\varphi_m=\left(D-\frac{\frac{d}{dx}\left(l_{m-1}\varphi_m(x)\right)}{l_{m-1}\varphi_m(x)}\right)l_{m-1}\varphi_m,=Dl_{m-1}\varphi_m-Dl_{m-1}\varphi_m=0.$$

即，L_m也以$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)$为基解组．因此，

$$l_m=L_m.$$

契比晓夫算子的递推关系[1]是(1.3)式的特例．

2．Green函数的递推关系

分别记l_m和l_{m-1}的Green函数为$G_m(x,t)$、$G_{m-1}(x,t)$．给出$G_m(x,t)$和$G_{m-1}(x,t)$的递推关系．

定理2 设定理1的条件成立，则

$$G_m(x,t)=\int_a^b(\eta-t)_+^0\,G_{m-1}(x,\eta)\beta(\eta,t)d\eta,\tag{2.1}$$

其中

$$\beta(\eta,t)=\frac{l_{m-1}\varphi_m(\eta)}{l_{m-1}\varphi_m(t)}.\tag{2.2}$$

证明 据Green函数的定义不难验证，$G_m(x,t)$满足如下的边值问题

$$\begin{cases}l_mG_m(x,t)=0,\ t\leqslant x\leqslant b,\\ G_m(x,t)=0,\ a\leqslant x<t\\ D_+^jG_m(x,t)|_{x=t}=0,\ j=0,1,\cdots,m-2,\\ D_+^{m-1}G_m(x,t)|_{x=t}=1.\end{cases}\tag{2.3}$$

由定理1中微分算子的递推公式(1.3)，边值问题(2.3)可改写如下形式

$$\begin{cases}(D-\alpha(x))l_{m-1}G_m(x,t)=0,\ t\leqslant x\leqslant b,\\ G_m(x,t)=0,\ a\leqslant x<t,\\ l_{m-1}G_m(x,t)|_{x=t}=1.\end{cases}\tag{2.4}$$

注意到由$G_m(x,t)=0$，$a\leqslant x<t$，可导得$l_{m-1}G_m(x,t)=0$，$a\leqslant x<t$，于是令$H_m(x,t)=l_{m-1}G_m(x,t)$，便有

$$\begin{cases}(D-\alpha(x))H_m(x,t)=0,\ t\leqslant x\leqslant b,\\ H_m(x,t)=0,\ a\leqslant x<t,\\ H_m(x,t)|_{x=t}=1.\end{cases}\tag{2.5}$$

求解边值问题(2.5)，得

$$H_m(x,t)=(x-t)_+^0\,e^{\int_t^x\alpha(\eta)d\eta},\quad a\leqslant x,\ t\leqslant b.$$

即

$$l_{m-1}G_m(x,t)=(x-t)_+^0\,e^{\int_t^x\alpha(\eta)d\eta}=(x-t)_+^0\,\beta(x,t),\quad a\leqslant x,t\leqslant b,\tag{2.6}$$

其中$\beta(x,t)=\dfrac{l_{m-1}\varphi_m(x)}{l_{m-1}\varphi_m(t)}$.

由此可知，$G_m(x,t)$满足$m-1$阶微分方程的边值问题

$$\begin{cases} l_{m-1}G_m(x,t)=(x-t)_+^0\beta(x,t),\ a\leqslant x\leqslant b \\ D_+^jG_m(x,t)|_{x=t}=0,\ j=0,1,\cdots,m-2. \end{cases} \tag{2.7}$$

求解边值问题(2.7)得

$$G_m(x,t)=\int_a^b(\eta-t)_+^0G_{m-1}(x,\eta)\beta(\eta,t)d\eta. \qquad \triangle$$

记l_m和l_{m-1}的共轭算子分别为l_m^*和l_{m-1}^*. 相应的Green函数分别为$G_m^*(x,t)$和$G_{m-1}^*(x,t)$。

推论　设定理1的条件成立，则

$$G_m^*(x,t)=\int_a^b(\eta-x)_+^0G_{m-1}^*(\eta,t)\beta(\eta,x)d\eta, \tag{2.8}$$

其中$\beta(\eta,x)$由(2.2)式给定。

证明　据Green函数的理论.

$$G_m^*(x,t)=G_m(t,x),\quad G_{m-1}^*(x,t)=G_{m-1}(t,x).$$

又据定理2

$$G_m^*(x,t)=\int_a^b(\eta-x)_+^0G_{m-1}(t,\eta)\beta(\eta,x)d\eta$$

$$=\int_a^b(\eta-x)_+^0G_{m-1}^*(\eta,t)\beta(\eta,x)d\eta. \qquad \triangle$$

最后，顺便指出，把微分算子Green函数的递推关系与广义差商的递推关系结合起来，不难得出m阶算子B样条与$m-1$阶算子B样条的递推关系. 这一递推关系是多项式B样条积分递推关系的推广.

参 考 文 献

[1] L. Schumaker, Larry, *Spline Function: Basic Theory*, Interscience, New York, 1981.

[2] 许跃生，应用数学和力学，5 (1984), 3, 391—398.