

# 旋转周期结构的分析解\*

蔡承武

(力学系)

## 摘要

本文讨论具有旋转周期性的连续系统。用分析方法获得了如下问题的精确解：(1)角点铰支，正多边形平面框架的强迫振动。(2)横截面为正多边形的棱柱形薄壳在特定边界条件下的固有振动及在轴向压力作用下的屈曲。

关于旋转周期结构的研究，目前基本上局限于离散化的模型，对连续系统的旋转周期结构，尚缺少系统的工作。本文建立了旋转周期结构的基本方程。并结合具体的结构，分别讨论了固有振动、强迫振动与稳定性，给出了相应的解析表达式。

## 一、运动方程

图1为示意的旋转周期结构。为了利用周期性，各子结构所取的局部坐标应符合旋转周期性，子结构广义位移在局部坐标中定义。在局部坐标中建立各子结构的运动微分方程，一般地可表为

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_m(\mathbf{x}, t) + \mathbf{p} \ddot{\mathbf{W}}_m(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_m(\mathbf{x}, t) \quad \text{在 } \Omega_m \text{ 内,} \\ m = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1)$$

其中  $\mathbf{W}_m$  为第  $m$  个子结构的广义位移矢量， $\mathbf{x}$  为局部坐标中的坐标矢量， $\mathbf{p}$  为广义质量矩阵， $t$  为时间， $\mathbf{F}_m$  为作用在第  $m$  个子结构上的广义干扰力矢量， $\mathbf{L}$  为关于  $\mathbf{x}$  的线性微分算子矩阵， $N$  为子结构总数， $\Omega_m$  为第  $m$  个子结构所占的区域。

边界条件可表为

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_m(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \partial \Omega_m \text{ 上, } m = 1, 2, \dots, N. \quad (1.2)$$

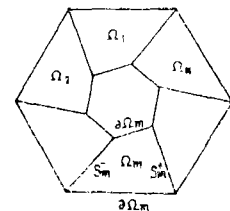


图 1

本文1985年6月收到

● 本项研究由中山大学高等学术研究中心基金会资助

**A**为表达边界条件的微分算子矩阵。 $\partial\Omega_m$ 为边界与 $\Omega_m$ 的界面。

在子结构之间的界面上定义状态矢量：

$$\mathbf{V}_m = \{\mathbf{u}_m \boldsymbol{\sigma}_m\}^* \tag{1.3}$$

其中 $\mathbf{u}_m, \boldsymbol{\sigma}_m$ 分别为界面上的广义位移矢量与广义应力矢量。各界面上状态矢量的定义应符合旋转周期性。

假设一子结构只与相邻两个子结构有公共界面， $m$ 子结构与 $m+1, m-1$ 子结构的界面分别记作 $S_m^+, S_m^-$ 。状态矢量与广义位移的关系一般可表为

$$\mathbf{B}\mathbf{W}_m = \begin{cases} \mathbf{V}_m^+ & \text{在 } S_m^+ \text{ 上,} \\ \mathbf{V}_m^- & \text{在 } S_m^- \text{ 上,} \end{cases} \quad m = 1, \dots, N. \tag{1.4}$$

**B**为微分算子矩阵。第 $m$ 与 $m+1$ 子结构间的连接条件可表为

$$\mathbf{V}_m^+ = \mathbf{V}_{m+1}^-, \quad m = 1, 2, \dots, N, \tag{1.5}$$

其中 $\mathbf{V}_{N+1}^- \equiv \mathbf{V}_1^-$ 。以(1.4)式代入(1.5)式得

$$\mathbf{B}\mathbf{W}_m \Big|_{S_m^+} = \mathbf{B}\mathbf{W}_{m+1} \Big|_{S_{m+1}^-}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \tag{1.6}$$

其中 $\mathbf{W}_{N+1}^- \equiv \mathbf{W}_1^-, S_{N+1}^- \equiv S_1^-$ 。注意到结构几何上的旋转周期性， $\Omega_m, \partial\Omega_m, S_m^+, S_m^-$ 与下标无关，以后均略去下标。

(1.1)、(1.2)、(1.6)诸式可改写为

$$\mathcal{L}\mathbf{W} + \mathcal{P}\ddot{\mathbf{W}} = \mathbf{F}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内,} \tag{1.7}$$

$$\mathcal{A}\mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \tag{1.8}$$

$$\mathcal{B}\mathbf{W} \Big|_{s^+} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{B}\mathbf{W} \Big|_{s^-} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N\}, \mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N\}, \tag{1.10}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} &= \left[ \begin{array}{c} \diagdown \mathbf{L} \diagup \end{array} \right]^{**}, \mathcal{P} = \left[ \begin{array}{c} \diagdown \mathbf{p} \diagup \end{array} \right], \mathcal{A} = \left[ \begin{array}{c} \diagdown \mathbf{A} \diagup \end{array} \right], \mathcal{B} = \left[ \begin{array}{c} \diagdown \mathbf{B} \diagup \end{array} \right], \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}], \boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \boldsymbol{\varepsilon}_{23} = \dots = \boldsymbol{\varepsilon}_{N-1, N} = \boldsymbol{\varepsilon}_{N, 1} = \mathbf{I}_{i \times j}, \text{ 其余元素为零} \end{aligned} \right\} \tag{1.11}$$

$j$ 为 $\mathbf{W}_m$ 的维数， $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。

## 二、方程的解耦

在复函数空间中作变换，令

•  $\{\dots\} \equiv \{\dots\}$ ，以下同。

•  $\left[ \begin{array}{c} \diagdown \mathbf{L} \diagup \end{array} \right]$ 代表对角块均为 $\mathbf{L}$ 的准对角矩阵，以下同。

$$\mathbf{W}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{i(k-1)m\psi} \mathbf{q}_m, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

其中  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N$  为另一组广义坐标, 称为结构的旋转坐标.  $i$  为虚数的单位.

(2.1)式可改写为

$$\mathbf{W} = \mathbf{E}\mathbf{q}, \quad (2.2)$$

其中

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_N], \mathbf{E}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_J \\ e^{ik\psi} \mathbf{I}_J \\ \vdots \\ e^{i(N-1)k\psi} \mathbf{I}_J \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_N \end{pmatrix}, \psi = \frac{2\pi}{N}. \quad (2.3)$$

可以证明矩阵  $\mathbf{E}$  为  $U$  矩阵, 它满足

$$\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{E} = \mathbf{I}. \quad (2.4)$$

$\bar{\mathbf{E}}^T$  代表  $\mathbf{E}$  的共轭转置矩阵,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵.

以(2.2)式分别代入(1.7)、(1.8)、(1.9)诸式, 并以  $\bar{\mathbf{E}}^T$  左乘各式得到

$$\mathcal{L}\mathbf{q} + \mathcal{P}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{B}\mathbf{q}|_{s^+} = \phi \mathcal{B}\mathbf{q}|_{s^-}, \quad (2.7)$$

其中

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{F}, \quad (2.8)$$

$$\phi = \bar{\mathbf{E}}^T \epsilon \mathbf{E} = \begin{pmatrix} e^{i\psi} \mathbf{I}_J & & \mathbf{0} \\ & e^{2i\psi} \mathbf{I}_J & \\ \mathbf{0} & & e^{iN\psi} \mathbf{I}_J \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$\phi$  为对角矩阵. 由此可见, 各子结构的旋转坐标运动微分方程已解除耦合, 问题归结为求解  $N$  组单一子结构的运动微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{q}_m + \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}}_m &= \mathbf{f}_m, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \mathbf{A}\mathbf{q}_m &= \mathbf{0}, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad m=1, 2, \dots, N, \\ \mathbf{B}\mathbf{q}_m|_{s^+} &= e^{im\psi} \mathbf{B}\mathbf{q}_m|_{s^-}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

其中

$$\mathbf{f}_m = \bar{\mathbf{E}}_m^T \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{-i(k-1)m\psi} \mathbf{F}_k. \quad (2.11)$$

考虑谐振动, 令

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k0}(x) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{q}_m = \mathbf{Q}_m(x) e^{i\omega t}. \quad (2.12)$$

代入(2.10)式得:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{LQ}_m - \omega^2 \rho \mathbf{Q}_m &= \mathbf{f}_{m0}, \text{ 在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{AQ}_m &= \mathbf{0}, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上, } m = 1, 2, \dots, N, \\ \mathbf{BQ}_m|_{s^+} &= e^{im\psi} \mathbf{BQ}_m|_{s^-} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

其中

$$\mathbf{f}_{m0} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{-i(k-1)m\psi} \mathbf{F}_{k0}. \quad (2.14)$$

### 三、固有振动

令

$$\mathbf{f}_{m0} = \mathbf{0}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

从(2.13)式便得:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{LQ}_m - \omega^2 \rho \mathbf{Q}_m &= \mathbf{0}, \text{ 在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{AQ}_m &= \mathbf{0}, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上, } m = 1, 2, \dots, N. \\ \mathbf{BQ}_m|_{s^+} &= e^{im\psi} \mathbf{BQ}_m|_{s^-}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

此为微分方程特征值问题, 当求得某一特征对  $\omega_m^2, \mathbf{Q}_m \cdot (\mathbf{Q}_k = \mathbf{0} \ k \neq m)$  时, 旋转周期结构对应的固有频率为  $\omega_m$ , 固有振型为

$$\mathbf{W} = \mathbf{E}_m \mathbf{Q}_m. \quad (3.3)$$

**例题 1** 横截面为正N边形的均质等厚度柱壳(如图2所示), 假设边界简支, 棱边有加强肋加强, 有加强肋处壳体中面的位移可以忽略, 但壳体中面法线仍可绕加强肋自由转动。单一子结构为矩形板, 设边长为a与b, 抗弯刚度为D, 单位面积的质量为  $\rho$ 。

取局部坐标  $oxy$  (图2), x与y轴分别沿矩形板的两条边, y轴平行于柱壳的母线。

单一子结构固有振动方程为

$$\frac{\partial^4 Q_m}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Q_m}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Q_m}{\partial y^4} = \beta^4 Q_m. \quad (3.4)$$

频率参数  $\beta$  与固有频率  $\omega$  的关系为

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho}{D}. \quad (3.5)$$

边界条件与连接条件为

$$\left. \begin{aligned} Q_m(x, 0) &= 0, & \frac{\partial^2 Q_m}{\partial y^2}(x, 0) &= 0, \\ Q_m(x, b) &= 0, & \frac{\partial^2 Q_m}{\partial y^2}(x, b) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

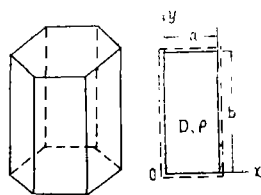


图2

$$\left. \begin{aligned} Q_m(0, y) = 0, \quad Q_m(a, y) = 0, \\ \frac{\partial Q_m}{\partial x}(a, y) = e^{im\psi} \frac{\partial Q_m}{\partial x}(0, y), \\ \frac{\partial^2 Q_m}{\partial x^2}(a, y) = e^{im\psi} \frac{\partial^2 Q_m}{\partial x^2}(0, y). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$Q_m(x, y) = X_{mn}(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (n \text{ 为正整数}). \quad (3.8)$$

它已预先满足边界条件(3.6), 将上式代入方程(3.4)得到

$$\frac{d^4 X_{mn}}{dx^4} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 X_{mn}}{dx^2} + \left( \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \beta^4 \right) X_{mn} = 0. \quad (3.9)$$

将(3.8)式代入(3.7)式, 便可得到方程(3.9)的边界条件

$$\left. \begin{aligned} X_{mn}(0) = 0, \quad X_{mn}(a) = 0, \\ X'_{mn}(a) = e^{im\psi} X'_{mn}(0), \\ X''_{mn}(a) = e^{im\psi} X''_{mn}(0). \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

方程(3.9)的通解为

$$X_{mn}(x) = A_{mn} \operatorname{sh} \lambda_n x + B_{mn} \operatorname{ch} \lambda_n x + C_{mn} \sin \mu_n x + D_{mn} \cos \mu_n x, \quad (3.11)$$

其中

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \beta^2}, \quad \mu_n = \sqrt{\beta^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}. \quad (3.12)$$

将(3.11)式代入(3.10)式, 可得到一组关于  $A_{mn}$ 、 $B_{mn}$ 、 $C_{mn}$ 、 $D_{mn}$  的线性齐次代数方程组, 令系数行列式为零, 展开行列式, 便得频率方程

$$\begin{aligned} \mu_n \operatorname{sh} \lambda_n a \cos \mu_n a - \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n a \sin \mu_n a + \cos \frac{2m\pi}{N} (\lambda_n \sin \mu_n a - \mu_n \operatorname{sh} \lambda_n a) = 0, \\ m = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.13)$$

以(3.5)式代入(3.12)式, 便可得到  $\lambda_n$ 、 $\mu_n$  与圆频率  $\omega$  的关系.

两种特殊的振型讨论如下:

(1) 各子结构的振动位相相同. 以  $m = N$  代入方程(3.13)得到相应的频率方程.

$$\mu_n \operatorname{sh} \lambda_n a (\cos \mu_n a - 1) - \lambda_n \sin \mu_n a (\operatorname{ch} \lambda_n a - 1) = 0,$$

或

$$-4 \sin \frac{\mu_n a}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2} (\mu_n \operatorname{ch} \frac{\lambda_n a}{2} \sin \frac{\mu_n a}{2} + \lambda_n \operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2} \cos \frac{\mu_n a}{2}) = 0.$$

等价于以下两个方程

$$\sin \frac{\mu_n a}{2} = 0, \quad (a)$$

$$\mu_n \operatorname{ch} \frac{\lambda_n a}{2} \sin \frac{\mu_n a}{2} + \lambda_n \operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2} \cos \frac{\mu_n a}{2} = 0. \quad (b)$$

从方程(a)解得:

$$\beta^2 = \pi^2 \left( \frac{s^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots, \\ s = 2, 4, 6, \dots \end{matrix}$$

对应于四边简支的矩形板，沿  $x$  方向有偶数个半波的固有振动频率。可证方程(b)的根，对应于两对边简支、两对边固定 ( $x = 0, a$ ) 的矩形板，对  $x = \frac{a}{2}$  直线对称的固有振动频率。

(2) 相邻子结构的振动位相相反，(当  $N$  为偶数时) 以  $m = \frac{N}{2}$  代入方程(3.13) 得对应的频率方程

$$\mu_n \operatorname{sh} \lambda_n a (\cos \mu_n a + 1) - \lambda_n \sin \mu_n a (\operatorname{ch} \lambda_n a + 1) = 0,$$

或

$$4 \cos \frac{\mu_n a}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_n a}{2} \left( \mu_n \operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2} \cos \frac{\mu_n a}{2} - \lambda_n \operatorname{ch} \frac{\lambda_n a}{2} \sin \frac{\mu_n a}{2} \right) = 0.$$

它等价于

$$\cos \frac{\mu_n a}{2} = 0, \tag{c}$$

$$\mu_n \operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2} \cos \frac{\mu_n a}{2} - \lambda_n \operatorname{ch} \frac{\lambda_n a}{2} \sin \frac{\mu_n a}{2} = 0. \tag{d}$$

从方程(c)解得

$$\beta^2 = \pi^2 \left( \frac{s^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots, \\ s = 1, 3, 5, \dots \end{matrix}$$

对应于四边简支矩形板，沿  $x$  方向有奇数个半波的固有振动频率。可以证明方程(d)的根对应于两对边简支、两对边固定 ( $x = 0, a$ ) 的矩形板，对  $x = \frac{a}{2}$  直线反对称的固有振动频率。

### 四、强迫振动

在谐干扰力作用下，强迫振动的基本方程为(2.13)式，结合具体结构进行讨论：

**例题 2** 如图 3 所示，在框架某一边的中点作用有平行于  $y$  轴的横向集中力  $Pe^{i\omega t}$ 。

不妨设作用有载荷的子结构为第一子结构，各子结构的载荷幅值可表为

$$F_{10} = P\delta(x), \quad F_{20} = \dots = F_{N0} = 0. \tag{4.1}$$

其中  $\delta(x)$  为 Dirac delta 函数。以(4.1)式代入(2.14)式得

$$f_{m0} = \frac{P}{\sqrt{N}} \delta(x), \quad m = 1, 2, \dots, N. \tag{4.2}$$

对于本例题考虑的情形，(2.13)式可具体表为

$$\frac{d^4 Q_m(x)}{dx^4} - \beta^4 Q_m(x) = \frac{P}{EJ\sqrt{N}} \delta(x), \quad -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \tag{4.3}$$

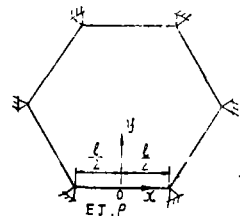


图 3

$$\left. \begin{aligned} Q_m(-\frac{l}{2}) &= 0, & Q_m(\frac{l}{2}) &= 0, \\ Q'_m(\frac{l}{2}) &= e^{im\psi} Q'_m(-\frac{l}{2}), & m &= 1, 2, \dots, N, \\ Q''_m(\frac{l}{2}) &= e^{im\psi} Q''_m(-\frac{l}{2}), \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其中

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho}{EJ}, \quad (4.5)$$

而 $\omega$ 为干扰力的圆频率,  $\rho$ 为梁单位长的质量.

方程(4.3)在边界条件(4.4)下的解为

$$Q_m(x) = \begin{cases} \frac{P}{2EJ\beta^3} \sqrt{\frac{1}{N}} \left[ (C_{m1} + \frac{1}{2}) \sin \beta x + C_{m2} \cos \beta x + (C_{m3} - \frac{1}{2}) \operatorname{sh} \beta x \right. \\ \quad \left. + C_{m4} \operatorname{ch} \beta x \right], & -\frac{l}{2} \leq x \leq 0, \\ \frac{P}{2EJ\beta^3} \sqrt{\frac{1}{N}} \left[ (C_{m1} - \frac{1}{2}) \sin \beta x + C_{m2} \cos \beta x + (C_{m3} + \frac{1}{2}) \operatorname{sh} \beta x \right. \\ \quad \left. + C_{m4} \operatorname{ch} \beta x \right], & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (4.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} c_{m1} &= \frac{i \sin(m\phi) \operatorname{sh} \alpha (\cos \alpha - \operatorname{ch} \alpha)}{c + d \cos(m\phi)}, \\ c_{m2} &= \frac{\sin \alpha}{c + d \cos(m\phi)} \left[ \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} 2\alpha \sin \alpha - \operatorname{sh} 2\alpha \cos \alpha + (\operatorname{sh} \alpha - \sin \alpha) \cos(m\phi) \right], \\ c_{m3} &= \frac{i \sin(m\phi) \sin \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \alpha)}{c + d \cos(m\phi)}, \\ c_{m4} &= \frac{\operatorname{sh} \alpha}{c + d \cos(m\phi)} \left[ \sin \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cos 2\alpha - \operatorname{ch} \alpha \sin 2\alpha + (\sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha) \cos(m\phi) \right], \\ c &= \operatorname{ch} 2\alpha \sin 2\alpha - \operatorname{sh} 2\alpha \cos 2\alpha, \\ d &= \operatorname{sh} 2\alpha - \sin 2\alpha, \quad \alpha = \frac{\beta l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} c &= \operatorname{ch} 2\alpha \sin 2\alpha - \operatorname{sh} 2\alpha \cos 2\alpha, \\ d &= \operatorname{sh} 2\alpha - \sin 2\alpha, \quad \alpha = \frac{\beta l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

频率方程为

$$c + d \cos(m\phi) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

当干扰力频率 $\omega$ 趋近固有频率时, 系数 $c_{mk}$  ( $m = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, 3, 4$ )中有一些趋于无穷大, 结构发生共振.

从(2.1)式可得各子结构的振幅与旋转坐标振幅的关系为

$$W_{ko} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{i(k-1)m\psi} Q_m(x), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.9)$$

不难证明 $Q_m(x) = \bar{Q}_{N-m}(x)$ ,  $W_{ko}$ 是一个实函数. 以(4.6)、(4.7)式代入(4.9)式, 可以得到各子结构的振幅. 例如第一个子结构的振幅为

$$\begin{aligned}
 W_{10}(x) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N Q_m(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N \operatorname{Re}[Q_m(x)] \\
 &= \begin{cases} \frac{P}{2EJ\beta^3} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left( \frac{1}{2} \sin\beta x + c_{m2} \cos\beta x - \frac{1}{2} \operatorname{sh}\beta x + c_{m4} \operatorname{ch}\beta x \right), & -\frac{l}{2} \leq x \leq 0, \\ \frac{P}{2EJ\beta^3} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left( -\frac{1}{2} \sin\beta x + c_{m2} \cos\beta x + \frac{1}{2} \operatorname{sh}\beta x + c_{m4} \operatorname{ch}\beta x \right), & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \end{cases} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

其中  $c_{m2}$ 、 $c_{m4}$  的表达式见 (4.7)、(4.8) 式。

### 五、屈曲问题

**例题 3** 考虑图 2 所示的柱壳，约束条件与例题 1 中所给的相同，两端横截面上作用有均匀轴向压力，单位弧长上的压力记作  $\sigma$ 。

单一子结构的屈曲方程可表为

$$D \left( \frac{\partial^4 q_m}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 q_m}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 q_m}{\partial y^4} \right) + \sigma \frac{\partial^2 q_m}{\partial y^2} = 0. \quad (5.1)$$

边界条件与约束条件为

$$\left. \begin{aligned} q_m(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 q_m}{\partial y^2}(x, 0) = 0, \\ q_m(x, b) = 0, \quad \frac{\partial^2 q_m}{\partial y^2}(x, b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} q_m(0, y) = 0, \quad q_m(a, y) = 0, \\ \frac{\partial q_m}{\partial x}(a, y) = e^{im\psi} \frac{\partial q_m}{\partial x}(0, y), \\ \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(a, y) = e^{im\psi} \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(0, y). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

考察如下形式的解

$$q_m(x, y) = X_m(x) \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (5.4)$$

它已预先满足边界条件 (5.2)。以上式代入 (5.1) 与 (5.3) 式得

$$\frac{d^4 X_m}{dx^4} - 2 \frac{\pi^2}{b^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} + \left( \frac{\pi^4}{b^4} - \frac{\sigma}{D} \frac{\pi^2}{b^2} \right) X_m = 0, \quad (5.5)$$

及边界条件

$$\left. \begin{aligned} X_m(0) = 0, \quad X_m(a) = 0, \\ X_m'(a) = e^{im\psi} X_m'(0), \\ X_m''(a) = e^{im\psi} X_m''(0). \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

只要令 (3.9)、(3.10) 式中  $n = 1$ ， $\beta^2 = \frac{\pi}{b} \sqrt{\frac{\sigma}{D}}$ ，便与 (5.5)、(5.6) 式完全相同。临界

压力 $\sigma_{cr}$ 是特征值问题(5.5)、(5.6)的最小特征值,它与频率方程(3.13)的最小根 $\beta_{\min}$ 有如下关系

$$\beta_{\min}^2 = \frac{\pi}{b} \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{D}}. \quad (5.7)$$

考虑 $a=b$ 的情形,引入无量纲屈曲因子

$$k_{cr} = \frac{\sigma_{cr} a^2}{D \pi^2}. \quad (5.8)$$

注意到(5.7)、(5.8)两式,从方程(3.13)计算得到如下结果:

N	偶数	3	5	7	9	11	$\infty$
$k_{cr}$	4.0000	4.7905	4.2867	4.1466	4.0887	4.0594	4.0000

由此可见,当 $N$ 为偶数值时临界压力值最低,与四边简支方板,单向受压时的临界压力值相同。当 $N=3$ 时,临界压力值最高。

### 参 考 文 献

- [1] D. C. Thomas, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 14 (1979), 81—102.
- [2] A. J. Fricker, S. Pofter, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 17 (1981), 957—974.
- [3] 王大中, 国际力学学报, 3 (1982), 440—451.
- [4] 王大中、吴正光, 中山大学学报(自然科学版), 1983, 3, 1—9.

## On Analytical Solution of Rotationally Periodic Structures

Cai Chengyu

### Abstract

The continuous system with rotational periodicity is considered. Some exact solutions are obtained for following problems: (1) The forced vibration for the polygonal frame which is simply supported at each nodal point. (2) The natural vibration and buckling problem for the prismatic shell whose normal cross section is a polygon.