

# 不可压粘性流体流动的边界 拟合坐标差分法\*

张涤明

詹杰民

(中山大学力学系)

(广州机床研究所)

## 摘 要

本文研究将边界拟合坐标差分法应用于不可压粘性流体流动的计算。我们所提出的不可压粘性流的边界拟合坐标差分格式和生成边界拟合坐标系的滑动边条件方法,得到了满意的算例。

## 一、引 言

不可压粘性流体流动有一个边界层的问题。在沿流场边界很薄的一个薄层里,流动速度沿薄层的厚度方向变化非常急剧,尤其在雷诺数的情形下更为突出。因此,当采用一般的差分法求解不可压粘性流时,不得不尽可能设法缩小步长,细分网格。然而这样做将带来计算量的骤增。在文[2]中作者曾采用了一种变步长的网格,用超松弛迭代法成功地处理了高雷诺数下矩形方腔中不可压粘性流体的环流。变步长网格可在不增大总网格结点的前提下,加密边界附近的网格,从而克服了一般差分法网格布置不灵活的缺点。但边界拟合坐标法在网格布置方面更具灵活性,它不仅拟合形状复杂的边界,而且可以非常灵活地任意调节和控制网格的疏密。这对于粘性流的计算是非常有利的。本文对二维不可压粘性流提出了一种边界拟合坐标的差分格式。当数值求解流函数涡量形式的  $N-S$  方程时,在壁面上的涡量条件,通常由流动的无滑移速度条件推出,但如此推得的涡量条件在化为数值格式后,是否仍等价于原来的无滑移条件,一般都没有给以证明,本文对这种等价性作了证明。本文还提出了几种生成边界拟合坐标系的滑动边条件。最后,我们提供了两个算例,都得到了满意的结果。

本文1985年9月收到

\* 中国科学院科学基金资助课题

## 二、方程与差分格式

Thompson等<sup>[1]</sup>通过变换 $\xi(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$ (或 $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ )建立了物理平面上形状复杂的区域与变换平面上一个或多个矩形区域之间的一一对应关系。变换 $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ 为下列方程的解

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2 (Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 & (2.1) \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2 (Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 & (2.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \Big|_{\text{边界}\Gamma^* \text{上}} = \begin{cases} \bar{x} \\ \bar{y} \end{cases}$$

其中:  $\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$ ,  $\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}$ ,

$$\gamma = x_{\xi}y_{\eta} + y_{\xi}x_{\eta}, \quad J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$$

$$P = -\sum_{i=1}^{n_1} a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) \exp(-C_i |\xi - \xi_i|) - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) \exp(-d_j((\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2)^{\frac{1}{2}}),$$

$$Q = -\sum_{i=1}^{n_2} a_i \operatorname{sgn}(\eta - \eta_i) \exp(-C_i |\eta - \eta_i|) - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\eta - \eta_j) \exp(-d_j((\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2)^{\frac{1}{2}}),$$

$\Gamma^*$ 是变换平面上变换区域的边界, 函数 $P, Q$ 可使坐标线向点 $(\xi_i, \eta_i)$ 和 $(\xi_j, \eta_j)$ 集中。  $a_i, b_i$ 为收缩强度,  $C_i, d_i$ 为衰减因子。

变换到 $(\xi, \eta)$ 坐标系, 流函数涡量形式的 $N-S$ 方程变为:

$$\begin{cases} \frac{1}{J} (\phi_{\eta}\omega_{\xi} - \phi_{\xi}\omega_{\eta}) = \frac{1}{J^2 Re} (\alpha\omega_{\xi\xi} - 2\beta\omega_{\xi\eta} + \gamma\omega_{\eta\eta} + \sigma\omega_{\eta} + \tau\omega_{\xi}) \\ \alpha\phi_{\xi\xi} - 2\beta\phi_{\xi\eta} + \gamma\phi_{\eta\eta} + \sigma\phi_{\eta} + \tau\phi_{\xi} = -J^2\omega \end{cases} \quad (2.3)$$

其中:  $\phi$ 为流函数,  $\omega$ 为涡量,  $Re$ 为雷诺数,

$$\sigma = \frac{1}{J} [y_{\xi} D(x) - x_{\xi} D(y)]$$

$$\tau = \frac{1}{J} [x_{\eta} D(y) - y_{\eta} D(x)]$$

而  $D(x) = \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}$

$$D(y) = \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}$$

在方程(2.3)中, 以二阶精度的差商代微商, 并引进松弛因子 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ , 于是得下列差分格式

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{i,j}^n = & \left\{ \frac{JRe}{4\Delta\xi\Delta\eta} \left[ (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n)(\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n) \right. \right. \\ & - (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n)(\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) \left. \right] + \frac{\alpha}{\Delta\xi^2} (\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n) \\ & - \frac{\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta} (\omega_{i+1,j+1}^n - \omega_{i-1,j+1}^n - \omega_{i+1,j-1}^n + \omega_{i-1,j-1}^n) + \frac{\gamma}{\Delta\eta^2} (\omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n) \\ & \left. + \frac{\sigma}{2\Delta\eta} (\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n) + \frac{\tau}{2\Delta\xi} (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) \right\} / \left( \frac{2\alpha}{\Delta\xi^2} + \frac{2\gamma}{\Delta\eta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \rho_1 \bar{\omega}_{i,j}^n + (1 - \rho_1) \omega_{i,j}^n \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i,j}^n = & \left\{ \frac{\alpha}{\Delta\xi^2} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n) - \frac{\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta} (\phi_{i+1,j+1}^n - \phi_{i-1,j+1}^n - \phi_{i+1,j-1}^n + \phi_{i-1,j-1}^n) \right. \\ & + \frac{\gamma}{\Delta\eta^2} (\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n) + \frac{\sigma}{2\Delta\eta} (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n) \\ & \left. + \frac{\tau}{2\Delta\xi} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) + \omega_{i,j}^n J^2 \right\} / \left( \frac{2\alpha}{\Delta\xi^2} + \frac{2\gamma}{\Delta\eta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \rho_2 \bar{\phi}_{i,j}^n + (1 - \rho_2) \phi_{i,j}^n \quad (2.7)$$

### 三、边界条件

#### 1. 生成边界拟合坐标系的滑动边条件

在计算机上数值求解方程(2.1)和(2.2)时,如果是逐点输入边界值来给定边条件,则输入数据的工作量很大,且不易调整边界上节点的疏密。然而在某些特殊情况下,下列的滑动边界条件是可以解决这些问题的。

(1) 当求解区域的边界由折线组成或形状变化较平缓时,滑动边界条件可描述为:一方面允许结点在迭代过程中沿边界滑动,另一方面要求连接结点交于边界的坐标线不弯曲(如图1所示),即

$$x = k(x_2 - x_1) + x_1 \quad (3.1)$$

$$y = k(y_2 - y_1) + y_1 \quad (3.2)$$

式中

$$k = \frac{(x_{m_1} - x_{m_2})(y_1 - y_{m_1}) - (y_{m_1} - y_{m_2})(x_1 - x_{m_1})}{(y_{m_1} - y_{m_2})(x_2 - x_1) - (x_{m_1} - x_{m_2})(y_2 - y_1)}$$

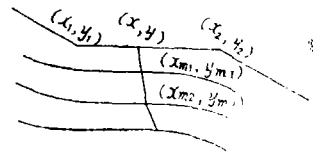


图1

(2) 在求解流动方程时,经常要遇到在区域边界上计算法向导数 $\frac{\partial}{\partial n}$ 的问题。如果能把边界附近的坐标线安排成与边界垂直,则可简化法向导数 $\frac{\partial}{\partial n}$ 的计算。针对此情况,我们给出下列形式的滑动边界条件:

$$(x - x_{m_1})\eta_y - (y - y_{m_1})\eta_x = 0, (x, y) \in \Gamma_A \quad (3.3)$$

其中,  $\Gamma_A$  为区域边界,点  $(x_{m_1}, y_{m_1})$  与边界上的点  $(x, y)$  同在一条与边界相交的坐标线上。

若 $\Gamma_1$ 为直线(见图1), 则(3.3)变成

$$\begin{aligned} x &= k(x_2 - x_1) + x_1 \\ y &= k(y_2 - y_1) + y_1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

式中 
$$k = \frac{(x_2 - x_1)(x_{m1} - x_1) + (y_2 - y_1)(y_{m1} - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(3) 如果在流场的某段边界(设为 $\Gamma_B$ )上, 流动方向一致, 则将与边界相交的坐标线安排成平行于流动方向, 会给流动的求解带来方便。在此情况下, 滑动边界条件可写成:

$$y - y_{m1} = k_0(x - x_{m1}), \quad (x, y) \in \Gamma_B \tag{3.5}$$

式中 $k_0$ 是流动方向的斜率。

### 2. 求解N-S方程的壁面涡量边条件

壁面涡量条件通常是由流动无滑移条件推得。如图2所示,  $\sigma$ 是物理平面上的流动

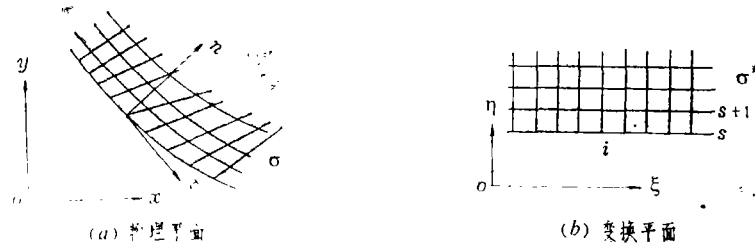


图2

区域,  $\sigma^*$ 是变换平面上的变换区域, 如果

$$\phi|_s = \text{const} \tag{3.6}$$

且在 $\sigma^*$ 内, 成立差分方程

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\Delta\xi^2} (\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}) - \frac{\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta} (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}) \\ &+ \frac{\gamma}{\Delta\eta^2} (\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}) + \frac{\sigma}{2\Delta\eta} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) \\ &+ \frac{\tau}{2\Delta\xi} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) + o(\Delta\xi^2) = -J^2\omega_{i,j} \end{aligned} \tag{3.7}$$

那么由二阶精度的无滑移条件

$$|\vec{v}|_s = o(\Delta\xi^2) \tag{3.8}$$

可推得在壁面上的涡量条件为

$$\omega_{i,s} = -2\beta \frac{\phi_{i+1,s+1} - \phi_{i,s+1}}{\Delta\xi\Delta\eta} + 2\gamma \frac{(\phi_{i,s+1} - \phi_{i,s})}{\Delta\eta^2} + o(\Delta\xi) \tag{3.9}$$

事实上, 因

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (v_n, v_\tau)|_s \\ &= \frac{1}{(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{\frac{1}{2}}} \left( \phi_\xi (\xi_y \eta_x - \xi_x \eta_y), -\phi_\xi (\xi_y \eta_y + \xi_x \eta_x) - \phi_y (\eta_x^2 + \eta_y^2) \right) \Big|_s \end{aligned}$$

又 $\phi|_s = \text{常数}$ , 因此 $|\vartheta|_s = o(\Delta\xi^2)$  等价于

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\Big|_s = o(\Delta\xi^2)$$

将(3.7)写成微分形式, 并将 $\phi|_s = \text{const}$ 和 $\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\Big|_s = o(\Delta\xi^2)$ 代入其中, 得

$$\omega_{i,s} = -\frac{1}{J^2}\left[-2\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right]\Big|_{i,s} + o(\Delta\xi) \tag{3.10}$$

上式中以差商代微商, 即可得(3.9)。

反之, 由壁面涡量条件(3.9)可推出二阶精度的流动无滑移条件(3.8)。事实上, 由(3.9)可得

$$\omega_{i,s} = -\frac{1}{J^2}\left[-2\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\Big|_{i,s} + \gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\Big|_{i,s} + \frac{2\gamma}{\Delta\eta}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\Big|_{i,s}\right] + o(\Delta\xi)$$

然后由上式与加上 $\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\Big|_s$ 项的(3.10)相减, 得

$$\left(\sigma - \frac{2\gamma}{\Delta\eta}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\Big|_s = o(\Delta\xi)$$

于是  $\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\Big|_s = o(\Delta\xi^2)$

即  $|\vartheta|_s = o(\Delta\xi^2)$

可见, 壁面涡量条件与二阶精度的流动无滑移条件是等价的, 可得如下定理。

**定理** 若(3.6)与(3.7)分别在 $\sigma^*$ 的边界上和区域内成立, 且由坐标线构成的曲线网格的网格直径与步长 $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$ 有相同的量阶, 则壁面涡量条件(3.9)成立的充分必要条件是二阶精度的流动无滑移的速度条件(3.8)成立。

## 四、数值算例

### 1. 方腔环流计算

这是不可压粘性流检验数值方法的一个典型算例。我们设方腔的无量纲长度和宽度, 以及顶面的无量纲速度均为1。首先用超松弛方法求解方程(2.1)和(2.2), 以形成拟合坐标网格。在求解过程中, 使用了滑动边条件(3.4), 使网格疏密的调整很方便, 所生成的边界拟合坐标系符合要求, 如图3所示。与此同时, 这还给物理边条件的处理带来方便, 因为此时在边界上, 一方面有 $\text{grad}\xi \cdot \text{grad}\eta = 0$ , 即有 $\beta_s = 0$ , 另一方面 $\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$ 的计算得到了简化。

然后用差分格式(2.4)~(2.7)计算了不同雷诺数的腔内流动(图4)。边界拟合坐标差分法计算的结果与变超法<sup>[2]</sup>计算的结果非常一致。例如, 在

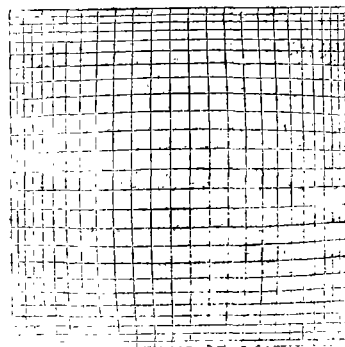


图3

不同雷诺数下,两种方法得到的主涡位置都很吻合(见表1)。

表1 主涡位置

雷诺数, Re		9	10	100	500	1000	
主 涡 位 置	$x_{vc}$	本文	—	0.52	0.62	0.57	0.54
		文[2]	0.53	—	0.61	0.55	0.53
	$y_{vc}$	本文	—	0.76	0.74	0.61	0.59
		文[2]	0.76	—	0.73	0.59	0.56

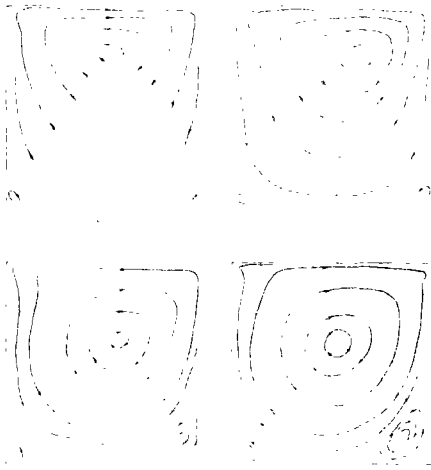


图4

## 2. 圆柱绕流计算

这是一个脱体绕流的典型例子。计算中,为了减小尾涡引起的边界值误差,我们将计算区域尽可能地取大,而又通过按照流场的变化情况调整网格疏密来保持着一定的总网格数。为了方便处理物理边界条件,在形成边界拟合坐标系求解方程(2.1)和(2.2)时,采用了滑动边条件(3.3),因而在圆柱壁上 $\beta_s = 0$ 。

图5是所生成的圆柱绕流的边界拟合坐标系,图6是不同雷诺数的圆柱绕流流场。可见,随着雷诺数的增大,尾涡在增大,而绕流的脱体点则往前移。计算结果与文[6]的结果相一致。

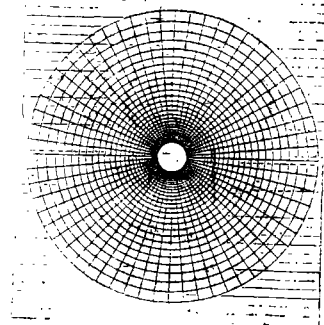


图5

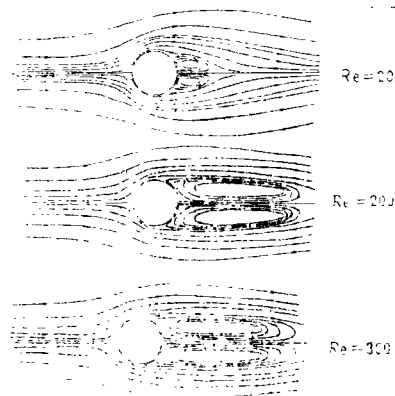


图6

## 参 考 文 献

- [1] J.F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin, *Journal of Computational Physics*, 15 (1974), 299.
- [2] 张涤明、詹杰民、蔡崇喜, 中山大学学报(自然科学版), 1984, 3, 80.
- [3] J.F. Thompson, *Computation Fluid Dynamics*, Heminghere Publishing Corporation, 1980, P.1.
- [4] F.C. Thames, J.F. Thompson, C.W. Mastin and Walker, *Journal of Computational Physics*, 24 (1977), 245.
- [5] Samuel P. Shanks, *Numerical Solution of Viscous Flow about Submerged Arbitrary Hydrofoils Using Non-Orthogonal Curvilinear Coordinates*, Ph. D. Dissertation Mississippi State University, 1977.
- [6] Lai Chen Chien and Yi Ping Wang, *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Part 1, PP. 609—620, 1985, Swansea, U.K.

## Finite Difference Methods Using Boundary-Fitted Coordinate Systems for Incompressible Viscous Flow

Zhang Diming Zhan Jiemin

### Abstract

The application of the boundary-fitted coordinate systems to incompressible viscous flow have been studied. Numerical examples using the presented methods is obtained satisfactorily.