

二阶算子样条的最佳插值结点*

黄友谦 谢志云

(计算机科学系)

提 要

对于严格凸(凹)函数, 本文给出了二阶算子样条最佳插值结点的特征定理。从而说明了在函数的奇点附近, 最佳插值结点的分布较密。对几个简单函数, 求出了最佳插值结点。

关键词 算子样条, 插值, 最佳结点

§1. 引 言

设 $L(D)$ 为常系数二阶微分算子, $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 为 $L(D)$ 的一个基解组。设函数 $\varphi_3(x)$ 满足: $L(D)\varphi_3(x) = 1$ 。显然 $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 、 $\varphi_3(x)$ 为一个线性无关组。

定义 1 称 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ 为 $[a, b]$ 上的契比晓夫系统, 如果对一切 $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$, 恒有

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \end{pmatrix} \equiv \det ((\varphi_i(x_j))_{m \times m}) > 0.$$

定义 2 称函数 $f(x)$ 关于 $\Phi = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^3$ 为严格凸(凹)函数, 如果对任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 成立 $[x_1, x_2, x_3]_{\Phi} f < 0$ ($[x_1, x_2, x_3]_{\Phi} f > 0$), 其中 $[x_1, x_2, x_3]_{\Phi} f$ 表示 $f(x)$ 关于 Φ 的广义差商。

设 $f(x) \in C[a, b]$ 为一个已知的关于 Φ 为严格凸(凹)的函数。记 $S_L(f, \Delta)$ 为 $f(x)$ 的关于分划 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ 和微分算子 $L(D)$ 的二阶算子样条插值函数。显然, 不同的分划 Δ , 就对应不同的算子样条插值函数。问题是, 怎样的分划 Δ , 使其所对应的插值函数 $S_L(f, \Delta)$ 在最大模意义下最佳逼近 $f(x)$ 。亦即:

求分划 Δ^* : $a = x_0^* < x_1^* < \dots < x_N^* = b$, 使得

本文1987年3月收到

● 中山大学高等学术研究中心资助项目

$$\inf_{\Delta} \|f - S_L(f, \Delta)\|_{[a, b]} = \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{[a, b]}. \quad (1.1)$$

其中下确界是对 $[a, b]$ 上所有可能的分划 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ 所取的, 这里 N 为固定的正整数, 记号 $\|g\|_{[a, b]} = \max_{a < x < b} |g(x)|$.

§2. 特征定理

为了给出最佳插值结点的充要条件, 首先证明下列两个引理.

引理 1 设 $f(x) \in C[a, b]$ 关于 Φ 为严格凸(凹)函数. I, \tilde{I} 是 $[a, b]$ 上的二个闭子区间. 分别以 I 和 \tilde{I} 的两个端点为插值点, 作 $f(x)$ 的 $L(D)$ 算子样条插值函数 $l(x)$ 和 $\tilde{l}(x)$. 若 $\{\varphi_i\}_{i=1}^2$ 及 $\{\varphi_i\}_{i=1}^3$ 是契比晓夫系统, 且 $I \supseteq \tilde{I}$, 则成立

$$\|f - l\|_I \geq \|f - \tilde{l}\|_{\tilde{I}}.$$

进一步, 若 $I \supsetneq \tilde{I}$, 则有严格不等式成立

$$\|f - l\|_I > \|f - \tilde{l}\|_{\tilde{I}}.$$

证明 仅就 $f(x)$ 关于 Φ 为严格凸的情形进行证明.

设 $I = [\alpha, \beta]$, $\tilde{I} = [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$. 由插值余项公式^[1] 有

$$l(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}) - [\alpha, \beta, \tilde{\alpha}]_{\Phi} f \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \tilde{\alpha} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$$

注意到 $f(\tilde{\alpha}) = \tilde{l}(\tilde{\alpha})$ 及 $f(x)$ 的凸性和 $\{\varphi_i\}_{i=1}^2, \{\varphi_i\}_{i=1}^3$ 为契比晓夫系统, 有

$$l(\tilde{\alpha}) - \tilde{l}(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}) - l(\tilde{\alpha}) = [\alpha, \beta, \tilde{\alpha}]_{\Phi} f \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \tilde{\alpha} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \geq 0. \quad (2.1)$$

同理可证得

$$\tilde{l}(\tilde{\beta}) - l(\tilde{\beta}) \geq 0. \quad (2.2)$$

又因 $\forall x \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] = \tilde{I}$, 有

$$\begin{aligned} l(x) - \tilde{l}(x) &= \left[\det \begin{pmatrix} x & \tilde{\beta} \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \right] \times (l(\tilde{\alpha}) - \tilde{l}(\tilde{\alpha})) \\ &\quad + \left[\det \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & x \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \right] \times (\tilde{l}(\tilde{\beta}) - l(\tilde{\beta})) \end{aligned}$$

注意到 $\{\varphi_i\}_{i=1}^2$ 为契比晓夫系统及(2.1)、(2.2)式, 立即可得

$$l(x) - \tilde{l}(x) \geq 0, \quad \forall x \in \tilde{I}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \|f - l\|_I &\geq \|f - \tilde{l}\|_{\tilde{I}} = \|f - \tilde{l} + \tilde{l} - l\|_{\tilde{I}} = \max\{(f(x) - \tilde{l}(x)) + (\tilde{l}(x) - l(x))\} \\ &\geq \max_{\tilde{\alpha} < x < \tilde{\beta}} (f(x) - \tilde{l}(x)) = \|f - \tilde{l}\|_{\tilde{I}}. \end{aligned}$$

若 $I \supset \bar{I}$, 则由上述证明过程可知, 成立下面的严格不等式

$$\|f - l\|_I > \|f - \bar{l}\|_{\bar{I}}. \quad \text{证毕.}$$

引理 2 设 $f(x) \in C[a, b]$ 关于 Φ 为严格凸(凹)函数. $l_{[\alpha, \beta]}(x)$ 表示以 $x = \alpha, x = \beta$ 为插值结点的 $L(D)$ 算子样条插值函数. 记 $e(\alpha, \beta) = \|f(x) - l_{[\alpha, \beta]}(x)\|_{[\alpha, \beta]}$. 若 $\{\varphi_i\}_{i=2}^n$ 和 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 为契比晓夫系统, 则 $e(\alpha, \beta)$ 关于 α 单调减, 关于 β 单调增, 且是 α 与 β 的连续函数.

证明 $e(\alpha, \beta)$ 关于 α, β 的单调性由引理 1 得证. 不妨设 $f(x)$ 关于 Φ 为严格凸的, 由于 $\{\varphi_i\}_{i=2}^n, \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 是契比晓夫系统, 因此 $\forall x \in [\alpha, \beta]$, 有 $f(x) - l_{[\alpha, \beta]}(x) \geq 0$. 由 $f(x)$ 的连续性知, 存在 $x_{\Delta\beta}^0 \in [\alpha, \beta + \Delta\beta]$, 使得

$$e(\alpha, \beta + \Delta\beta) = |f(x_{\Delta\beta}^0) - l_{[\alpha, \beta + \Delta\beta]}(x_{\Delta\beta}^0)| = f(x_{\Delta\beta}^0) - l_{[\alpha, \beta + \Delta\beta]}(x_{\Delta\beta}^0)$$

因此(不妨设 $\Delta\beta > 0$)

$$\begin{aligned} 0 &\geq e(\alpha, \beta) - e(\alpha, \beta + \Delta\beta) \geq (f(x_{\Delta\beta}^0) - l_{[\alpha, \beta]}(x_{\Delta\beta}^0)) \\ &\quad - (f(x_{\Delta\beta}^0) - l_{[\alpha, \beta + \Delta\beta]}(x_{\Delta\beta}^0)) = l_{[\alpha, \beta + \Delta\beta]}(x_{\Delta\beta}^0) - l_{[\alpha, \beta]}(x_{\Delta\beta}^0). \end{aligned}$$

利用 $x_{\Delta\beta}^0$ 关于 $\Delta\beta$ 有界及 $f(x)$ 的连续性, 注意到上式的 lagrange 表示法得出, 当 $\Delta\beta \rightarrow 0$ 时, 上式趋于零. 故

$$\lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} e(\alpha, \beta + \Delta\beta) = e(\alpha, \beta).$$

即 $e(\alpha, \beta)$ 关于 β 是连续的. 同理可证 $e(\alpha, \beta)$ 关于 α 也是连续的. 证毕.

定理 1 (特征定理) 设 $f(x) \in C[a, b]$ 关于 Φ 为严格凸(凹)函数. $\{\varphi_i\}_{i=2}^n, \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 比晓夫系统, 则 $S_L(f, \Delta^*)$ 是最佳插值问题(1.1)的解的充分必要条件是, $S_L(f, \Delta^*)$ 满足下列条件

$$\|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_i^*} = \|f - S(f, \Delta^*)\|_{[a, b]} \quad (i = 0, 1, \dots, N-1). \quad (2.3)$$

其中 $I_i^* = [x_i^*, x_{i+1}^*]$, $\Delta^* : a = x_0^* < x_1^* < \dots < x_N^* = b$.

证明 设 $S_L(f, \Delta^*)$ 满足条件(2.3). 若 $S(f, \Delta^*)$ 不是最佳解, 即存在 $[a, b]$ 上的一个分划 $\tilde{\Delta} : a = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_N = b$, 使得

$$\|f - S_L(f, \tilde{\Delta})\|_{[a, b]} < \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{[a, b]} \quad (2.4)$$

记 $\tilde{I}_i = [\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$. 则必有某个 $i_0 : 0 \leq i_0 \leq N-1$, 使 $\tilde{I}_{i_0} \supset I_{i_0}^*$. 因为否则由 $\tilde{I}_0 = [a, \tilde{x}_1] \supset [a, x_1^*] = I_0^*$ 得 $\tilde{x}_1 < x_1^*$; 又由 $\tilde{I}_1 \supset I_1^*$ 得 $\tilde{x}_2 < x_2^*$; \dots 依此递推下去, 重复 $N-1$ 步

之后, 可得 $\tilde{x}_{N-1} < x_{N-1}^*$. 从而 $\tilde{I}_{N-1} = [\tilde{x}_{N-1}, b] \supseteq [x_{N-1}^*, b] = I_{N-1}^*$, 这与 $\tilde{I}_{N-1} \supseteq I_{N-1}^*$ 矛盾. 故必有某个 i_0 : $0 \leq i_0 \leq N-1$, 使 $\tilde{I}_{i_0} \supseteq I_{i_0}^*$. 由引理 1 知,

$$\|f - S_L(f, \tilde{\Delta})\|_{\tilde{I}_{i_0}} \geq \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_{i_0}^*}, \quad (2.5)$$

又 $S_L(f, \Delta^*)$ 满足 (2.3), 因此

$$\|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_{i_0}^*} = \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{[a, b]}. \quad (2.6)$$

故由 (2.5)、(2.6) 可得

$$\begin{aligned} \|f - S_L(f, \tilde{\Delta})\|_{[a, b]} &\geq \|f - S_L(f, \tilde{\Delta})\|_{\tilde{I}_{i_0}} \geq \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_{i_0}^*} \\ &= \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{[a, b]} \end{aligned}$$

但这与 (2.4) 式矛盾. 充分性证毕.

设 $S_L(f, \Delta^*)$ 是最优问题 (1.1) 的解. 若 $S_L(f, \Delta^*)$ 不满足条件 (2.3), 则一定存在 i_0 , $0 \leq i_0 \leq N-1$, 使得

$$\begin{aligned} e(x_{i_0}, x_{i_0+1}) &= \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_{i_0}^*} < \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_{i_0+1}^*} \\ &= \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{[a, b]} \triangleq E \end{aligned}$$

或 $E \triangleq \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{[a, b]} = \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_{i_0}^*} > \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_{i_0+1}^*}$.

不失一般性, 假设出现的是第一种情形 (如图 1).

由引理 2, $e(x_{i_0}, \beta)$ 是 β 的连续单调增函数.

因此, 对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(E - e(x_{i_0}, x_{i_0+1})) > 0$

存在 $\beta_0 \in (x_{i_0+1}^*, x_{i_0+2}^*)$, 使

$$e(x_{i_0}, \beta_0) < e(x_{i_0}, x_{i_0+1}) + \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(E + e(x_{i_0}, x_{i_0+1})) < E$$

又由引理 1, 因 $[\beta_0, x_{i_0+2}] \subset [x_{i_0+1}, x_{i_0+2}]$, 故

$$e(\beta_0, x_{i_0+2}) < e(x_{i_0+1}, x_{i_0+2}) = E.$$

以 β_0 代替 x_{i_0+1} , 对 $[\beta_0, x_{i_0+2}]$ 右边的各个小区间以及 $[x_{i_0}, \beta_0]$ 左边的各个小区间施

上述同样的步骤, 则至多 N 步之后, 我们可得到一个新分划 $\tilde{\Delta}$, 对应于 $\tilde{\Delta}$ 的算子插值样条 $S_L(f, \tilde{\Delta})$ 具有性质 $\|f - S_L(f, \tilde{\Delta})\|_{\tilde{I}_i} < E$ ($i=0, 1, \dots, N-1$). 即

$$\|f - S_L(f, \tilde{\Delta})\|_{[a, b]} < \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{[a, b]}.$$

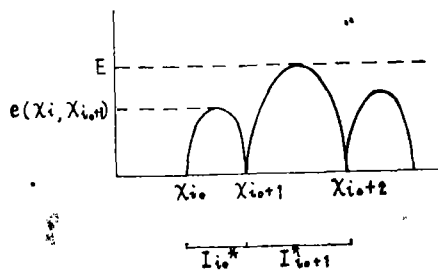


图 1

这与 $S_L(f, \Delta^*)$ 为最优解矛盾。必要性证毕。

定理 2 (唯一性定理) 设 $f(x) \in C[a, b]$ 关于 Φ 为严格凸(凹)函数。 $\{\varphi_i\}_{i=2}^1$, $\{\varphi_i\}_{i=3}^1$ 为契比晓夫系统。则满足条件(2.3)的 $L(D)$ 算子样条插值函数 $S_L(f, \Delta^*)$ 是唯一的。

证明类似于定理 1 的前半部分, 在此从略。

§3. 数值例子

例 1 取 $L(D) = D^2$, $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = \frac{x^2}{2}$, $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) =$

\sqrt{x} 。此时所讨论的插值问题即为一次样条插值问题。易验证, $\{\varphi_i\}_{i=2}^1$, $\{\varphi_i\}_{i=3}^1$ 是契比晓夫系统, 且 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 是严格凸函数。

设 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ 。

求得 $\|f - S_L(f, \Delta)\|_{[x_i, x_{i+1}]} = (x_{i+1}^{1/2} - x_i^{1/2}) / [4(x_i^{1/2} + x_{i+1}^{1/2})]$

由特征定理的条件(2.3)得

$$(x_{i+1}^{1/2} - x_i^{1/2})^2 / [4(x_i^{1/2} + x_{i+1}^{1/2})] = E \quad (i = 0, 1, \dots, N-1),$$

$E = \|f - S_L(f, \Delta)\|_{[0, 1]}$ 。

置 $x_i^{1/2} = \eta_i$, 由上式可解出 $\eta_{i+1} = \eta_i + 2E \pm 2\sqrt{E(E + 2\eta_i)}$ $i = 0, 1, \dots, N-1$ 。

因 $\{\eta_i\}_{i=0}^N$ 为单调增加序列, 故上式只取“+”号。注意 $\eta_0 = 0$, 故可递推解出 $\eta_i = 2Ei(i+1)$,

$(i = 0, 1, \dots, N)$ 。又注意到 $\eta_N = 1$, 因此 $E = \frac{1}{2N(N+1)}$ 。

即 $\|f - S_L(f, \Delta)\|_{[0, 1]} = E = \frac{1}{2N(N+1)}$,

故最佳插值结点为非等距结点:

$$x_i = \eta_i^2 = \left[\frac{i(i+1)}{N(N+1)} \right]^2 \quad (i = 0, 1, \dots, N).$$

Powell^[2] 对本例题提出过一种多项式算法, 即取插值结点为 $\bar{x}_i = \left[\frac{i}{N} \right]^4, i = 0,$

$1, \dots, N$ 。由特征定理知, powell 方案不是最优的。事实上, 最优插值误差 $E =$

$\frac{1}{2N(N+1)}$, 而 Powell 方案的插值误差为 $E_{\text{powell}} = \frac{1}{2N^2}$ 。显然, $E < E_{\text{powell}}$ 。

例 2 取 $f(x) = x^2$, 其它条件与例 1 相同。则 $f(x) = x^2$ 是 $[a, b]$ 上的严格凸函

数。由插值误差式^[1]

$$\|f - S_L(f, \Delta)\|_{I_i} = \left\| \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \cdot 2 \right\|_{I_i} = \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4},$$

及(2.3)式, 有

$$x_{i+1} - x_i = 2\sqrt{E} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

故函数 $f(x) = x^2$ 的最佳插值结点为**等距结点**:

$$x_i = a + 2i\sqrt{E} = a + 2i \left(\frac{b-a}{2N} \right) \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

而最佳插值误差为 $E = (b-a)/(2N)$.

§4. 注 记

注 1 由上面两个例子可以发现, 在函数 $f(x)$ 的奇点附近 (如例 1 中的函数 $f(x) = \sqrt{x}$, $x=0$ 为 $f(x)$ 的导数奇点), 最佳插值结点分布较密. 而对于无奇性函数 (如例 2 中的函数 $f(x) = x^2$), 最佳插值结点分布较均匀. 利用特征定理, 可以从理论上对这一现象进行解释.

为叙述简单计, 仅考虑 $L(D) = D^2$, $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = \frac{x^2}{2}$. 此时, 插值问题即为一次样条插值. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的严格凸连续函数, $S_L(f, \Delta^*)$ 为(1.1)的解. 由插值误差表达式及连续函数的中值定理可知, 存在 $\xi_i \in (x_{i+1}^*, x_i^*)$, 使得

$$\|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{I_i^*} = \frac{1}{4} (x_{i+1}^* - x_i^*)^2 \left| [x_i^*, x_{i+1}^*, \xi_i] f \right|$$

因 Δ^* 为最佳分划, 必满足条件(2.3), 从而

$$\frac{1}{4} (x_{i+1}^* - x_i^*)^2 \left| [x_i^*, x_{i+1}^*, \xi_i] f \right| = \|f - S_L(f, \Delta^*)\|_{[a, b]} \triangleq E$$

若 $I_i^* = [x_i^*, x_{i+1}^*]$ 是 $f(x)$ 的奇性邻域 (如 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $x=0$ 附近), 则 $[x_i^*, x_{i+1}^*, \xi_i] f$ 有较大的值, 由上式知, $x_{i+1}^* - x_i^*$ 将有较小的值, 即 I_i^* 的步长较小, 反之, 若 I_i^* 不是 $f(x)$ 的奇点邻域, $[x_{i+1}^*, x_i^*, \xi_i] f$ 有较小的值, 由上式知, $x_{i+1}^* - x_i^*$ 将有较大的值, 即 I_i^* 的步长较大. 因此, 在函数的奇点附近, 最佳插值结点分布较密.

注 2 在定理 2 中 (唯一性定理), 若 $f(x)$ 不是严格凸的, 则定理一般不成立.

注 3 特征定理的必要性证明是构造性的, 它已经给出了具体求最佳结点的思想.

据此, 我们可以构造一个具体求最佳结点的迭代算法. 这是非常必要的, 因为大多数函

数的最佳结点不能直接精确求得。

参 考 文 献

- [1] 李岳生著, 样条与插值, 上海科技出版社, 1983.
[2] M. J. D. Powell, *Approximation Theory and Methods*, Cambridge University press, 1981.

The Best Interpolation Points of Operator Spline Functions of Order Two

Huang Youqian Xie Zhiyun

Abstract

The characteristic theorem for the best interpolation points of operator spline functions of order two is proved for strictly convex (concave) interpolated functions. The theoretical explanation about denser distribution of the best interpolation points near singular point of interpolated function is presented. For a few simple interpolated functions, their best interpolation points are given according to the characteristic theorem.

Keywords Operator spline, Interpolation, Best knots