1987年第2期　中山大学学报 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№. 2, 1987

·研究简报·

陣风与波浪作用下船舶横摇运动的随机模型及其稳定性分析

符明南

（力学系）

文〔1〕、〔2〕提出波浪和阵风作用下的船舶横摇运动的随机模型，他们都把波浪施加给船舶的横摇力矩幅值视为常量。但因阵风影响，横摇力矩幅值实际上是随机变量。本文在横摇力矩幅值服从瑞利分布的条件下，研究了横摇力矩及阵风荷载对横摇运动的影响。

1. 船舶横摇运动方程

$$I\ddot{\phi}+D\dot{\phi}+W\cdot\overline{GM}\cdot\phi=\sum_{j=1}^{N(T)}P_j\delta(t-\tau_j)+L\cdot\cos(\omega t+\phi) \tag{1}$$

其中：

I 为船舶横摇惯性矩；D 为船舶横摇阻尼系数；W 为船舶总排水量；G 为浮心；M 为船舶重心；T 为刮风持续时间；$N(T)$ 为在〔0 T〕内阵风到达次数，假设它服从参数 λ_0 的波松分布；τ_j 为第 j（$j=1,2,\cdots,N(T)$）个阵风到达时刻；P_j 为第 j（$j=1,2,\cdots,N(T)$）个阵风施加于船舶的横摇力矩，假设它们是彼此独立同分布的随机变量；ϕ 为波浪施加于船舶横摇力矩的相位角，是〔0 2π〕上均匀分布的随机变量；ω 为波浪施加于船舶横摇力矩的波动角频率；L 为波浪施加于船舶的横摇力矩幅值，假设它服从瑞利分布，其概率密度函数为

$$f_L(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2L_0^2}x\cdot e^{-\frac{\pi x^2}{4L_0^2}}, & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x\leqslant 0\end{cases}$$

（L_0 是横摇力矩幅值 L 的均值）；$\phi(t)$ 为瞬时 t 船舶的横摇角度。

假设 τ_j，$P_j(j=1,2,\cdots,N(T))$，$N(T)$ 及 ϕ 彼此相互独立，且设

$$E[P_j]=IC_0,\quad E[P_j^2]=I^2H_0^2,\quad j=1,2,\cdots,N(T)$$

本文1986年1月收到

引入记号：

$$\bar{b}=\frac{D}{I},\quad \bar{c}=\frac{W\cdot\overline{GM}}{I},\quad K_0=\frac{L_0}{I},\quad Y_j=\frac{P_j}{I}$$

$$F(t)=\sum_{j=1}^{N(T)}Y_j\delta(t-\tau_j)+K_0\cdot\cos(\omega t+\phi)$$

则方程（1）化为

$$\ddot{\phi}+\bar{b}\dot{\phi}+\bar{c}\phi=F(t) \tag{2}$$

假设它满足初始条件

$$\phi(t)=0,\ t\leqslant 0\ 及\ \dot{\phi}(t)|_{t=0}=0 \tag{3}$$

根据所给条件可以推出外载荷 $F(t)$ 的均值函数和自相关函数，它们分别为

$$\mu_F(t)=E[F(t)]=C_0\lambda_0 \tag{4}$$

$$R_{FF}(t_1,t_2)=E[F(t_1)F(t_2)]=\lambda_0H_0^2\delta(t_1-t_2)+C_0^2\lambda_0^2+\frac{2L_0^2}{\pi I^2}\cos\omega(t_2-t_1) \tag{5}$$

2.船舶横摇运动的统计特性

由（2）、（3）、（4）式可求出 $\phi(t)$ 的均值函数

$$\mu_\psi(t)=\frac{C_0\lambda_0}{\bar{c}}+C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t} \tag{6}$$

其中，

$$r_1=\frac{-\bar{b}+\sqrt{\bar{b}^2-4\bar{c}}}{2},\qquad r_1=\frac{-\bar{b}-\sqrt{\bar{b}^2-4\bar{c}}}{2}$$

$$C_1=\frac{C_0\lambda_0r_2}{\bar{c}(r_1-r_2)},\qquad C_2=\frac{C_0\lambda_0r_1}{\bar{c}(r_2-r_1)}$$

由（2）、（3）、（5）式可求出 $F(t)$ 与 $\phi(t)$ 的互相关函数：

$$\begin{aligned}R_{F\psi}(t_1,t_2)=e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}&[A_1(t_1)\cdot\cos Et_2+A_2(t_1)\cdot\sin Et_2]+\\&+B_1+B_2h(t_2-t_1)\cdot H_0(t_2-t_1)+B_3\cdot R(1,0,\omega,t_2-t_1)\end{aligned} \tag{7}$$

其中，

$$A_1(t_1)=-B_1-B_3R(1,0,\omega,t_1),$$
$$A_2(t_1)=B_4+B_5R(1,0,\omega,t_1)+B_6T(1,0,\omega,t_1),$$

$$B_1=\frac{C_0^2\ \lambda_0^2}{\bar{c}},\quad B_2=\lambda_0H_0^2,\quad B_3=\frac{2L_0^2}{\pi I^2},\quad B_4=-\frac{1}{2}\ \frac{\bar{b}B_1}{E},\quad B_5=-\frac{1}{2}\ \frac{\bar{b}B_3}{E},$$

$$B_6=-\frac{B_3\omega}{E},\quad E=\frac{1}{2}\sqrt{4\bar{c}-\bar{b}^2},\quad H_0(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

$$R(n,v,u,t)=l^n(v,u)\cdot\cos[ut-n\theta(v,u)],$$
$$T(n,v,u,t)=l^n(v,u)\cdot\sin[uk-n\theta(v,u)],$$

$l(v,u)=(\sqrt{(v^2-u^2+\bar{c}-\bar{b}v)^2+(2vu-\bar{b}u)^2})^{-1}$, $\theta(v,u)=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2vu-\bar{b}u}{v^2-u^2+\bar{c}-\bar{b}u}$

最后，利用式（7）从下列定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t_1^2}R_{\psi\psi}(t_1t_2)+\bar{b}\dfrac{\partial}{\partial t_1}R_{\psi\psi}(t_1,t_2)+\bar{c}R_{\psi\psi}(t_1,t_2)=R_{F\psi}(t_1,t_2) & (8)\\ R_{\psi\psi}(0,t_2)=0, \qquad \dfrac{\partial}{\partial t_1}R_{\psi\psi}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=0}=0 & (9)\end{cases}$$

求得 $\psi(t)$的自相关函数

$$\begin{aligned}R_{\psi\psi}(t_1,t_2)=&-e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_1}\cos Et_1\Big\{\frac{B_1}{\bar{c}}+B_3R(2,0,\omega,-t_2)-\Big[\frac{B_1}{\bar{c}}+B_3R(2,0,\omega,0)\Big]\cdot\\ &\cdot e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\cos Et_2+\Big[\frac{B_4}{\bar{c}}+B_5\cdot R(2,0,\omega,0)+B_6T(2,0,\omega,0)\Big]\cdot\\ &\cdot e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\sin Et_2+\frac{B_2}{\omega d}\cdot e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}T(1,0,\omega_d,t_2)\cdot H_0(t_2)\Big\}+\\ &+e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_1}\sin Et_1\Big\{-\frac{\bar{b}}{2E}\Big[\frac{B_1}{\bar{c}}+B_3R(2,0,\omega,-t_2)\Big]+\\ &+\Big[\frac{\bar{b}}{2E}\Big(\frac{B_1}{\bar{c}}+B_3R(2,0,\omega,0)\Big)-\frac{B_3}{E}\cdot\omega T(2,0,\omega,0)\Big]\cdot\\ &\cdot e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\cos Et_2-\Big[\frac{\bar{b}}{2E}\Big(\frac{B_4}{\bar{c}}+B_5R(2,0,\omega,0)+B_6T(2,0,\omega,0)\Big)+\\ &+\frac{B_6}{E}\omega R(2,0,\omega,0)-\frac{B_5}{E}\omega T(2,0,\omega,0)\Big]e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\sin Et_2+\\ &+\frac{\omega B_3}{E}T(2,0,\omega,-t_2)+\frac{B_2}{E}e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}R(1,0,\omega_d,t_2)\cdot H_0(t_2)\Big\}+\\ &+\frac{1}{\bar{c}}(B_1-B_1e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\cos Et_2+B_4e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\sin Et_2)+\frac{B_2}{\omega_d}\cdot\\ &\cdot e^{-\frac{\bar{b}}{2}(t_2-t_1)}\cdot T\Big(1,-\frac{\bar{b}}{2},\omega_d,t_2-t_1\Big)\cdot H_0(t_2-t_1)+B_3R(2,0,\omega,t_2-t_1)-\\ &-\Big[B_3e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\cos Et_2-B_6e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\sin Et_2\Big]\cdot R(2,0,\omega,t_1)+\\ &+B_6T(2,0,\omega,t_1)\,e^{-\frac{\bar{b}}{2}t_2}\sin Et_2 \qquad (10)\end{aligned}$$

其中，　$\omega_d = \frac{1}{2}\sqrt{4\bar{c} - \bar{b}^2}$

当 t_1，t_2 同时足够大，而 $t_2 - t_1$ 保持有限时，从上式导出稳态响应时的 $\phi(t)$ 的自相关函数

$$R_{\psi\psi}(t_1, t_2) = \frac{B_1}{\bar{c}} + B_3 R(2, 0, \omega, t_2 - t_1) + \frac{B_2}{\omega_d} e^{-\frac{\bar{b}}{2}(t_2 - t_1)} \cdot T\left(1, -\frac{\bar{b}}{2}, \omega_d, t_2 - t_1\right) \cdot H_0(t_2 - t_1) \tag{11}$$

当 t 足够大由（6）式可推出稳态响应时的 $\phi(t)$ 的均值函数

$$\mu_\psi(t) = \frac{C_0 \lambda_0}{\bar{c}} \tag{12}$$

因此，利用式（11）及（12）可知船舶横摇运动的稳态响应的方差为

$$\sigma_\psi^2(t) = B_3 R(2, 0, \omega, 0) \tag{13}$$

3.船舶横摇运动的稳定性分析

若以 ϕ^* 表示使船舶发生倾复的最小横摇角度，则利用 Tchebycheff 不等式可得出船舶出现倾复的概率上界

$$\eta^2 = \frac{\sigma_\psi^2}{[\phi^* - \mu_\psi(t)]^2}$$

把（12）、（13）代入上式得

$$\eta^2 = \frac{2L_0^2 \, R(2,0,\omega,0)}{\pi I^2 \left(\phi^* - \frac{I D_0 \lambda_0}{W\overline{GM}}\right)^2} \tag{14}$$

其中

$$R(2, 0, \omega, 0) = ((\bar{c} - \omega^2)^2 + (\bar{b}\omega)^2)^{-1} \cdot \cos[2\theta(0, \omega)]$$

$$\theta(0, \omega) = \mathrm{tg}^{-1} \frac{\bar{b}\omega}{\omega^2 - \bar{c}}$$

（14）式给出在阵风与波浪联合作用下船舶横摇倾复的概率上界表达式，其中参数 C_0，λ_0 及 L_0 分别反映了阵风强度及到达率与波浪施加给船舶横摇力矩幅值对船舶横摇倾复的影响。

参 考 文 献

[1] Cardo. A. and Michelacci, G., A Stochastic Model for the Effect of wind on the Roll of a Ship, *Int Shipbldg*, 29 (1982), 161.

[2] G. Michelacci, A stochastic Model for Rolling Motion Dye to wind Gusts with Non-Uniformpoisson Distkibution, *Ocean Engng.*, 10 (1983) 3.