

格点强耦合展开的图算法*

李志兵 陈启洲 何宝鹏** 罗向前 郭硕鸿
(物理学系)

摘 要

本文给出格点上强耦合展开理论的一种新的处理方法,它兼有Feynman图方法和代数方法的一些优点.作为例子,文中计算了 $|\Delta s|=2$ 矩阵元的强耦合展开的前两级.

关键词 格点QCD, 图解方法

1 引 言

低能强相互作用不能用微扰计算,有希望系统解决低能强相互作用问题的理论有Wilson⁽¹⁾在1974年提出来的格点规范理论. Wilson最先在强耦合区得到夸克禁闭的证据, Kogut、Shigemitsu⁽²⁾等用强耦合展开方法计算了强子质量谱,得到有意义的结果.近年来人们对用格点理论计算非轻弱矩阵元的可能性抱有极大的兴趣⁽³⁾.

将近四十年悬而未决的非轻弱衰变过程据信含有非常强的强相互作用非微扰效应.这是格点规范理论的一个较新的领域.

强耦合展开计算的最直接的方法是代数方法,这是一件极其繁琐的工作.另一常用的方法是应用Feynman图技术⁽²⁾.它除了物理意义清晰外,还可以从图形上直接读出最后的结果,其缺点是图形繁多(四阶图通常有上千个图),没有比较系统的方法可以画出所有的Feynman图,因此很容易漏图.

本文拟在Feynman图的基础上,给出一种用于格点强耦合展开的图算法,它可以说是代数方法和Feynman图技术的一种综合.这种方法中的图形有两种意义.第一种意义是直接解析表达式“翻译”成图形.解析表达式中的夸克场、规范链、自旋

本文1987年9月收到

* 本研究得到中山大学高等学术中心基金会和国家教委自然科学基金会资助

** 华南师范大学

Pauli 矩阵以及它们的左右顺序都一一用图形对应起来(图1)。时间轴从下向上,标有指标 α 的端点表示夸克产生(或湮没)的时间, $\alpha = c, s, f$ 分别对应夸克的颜色、自旋和味道指标。

规范链及泡利矩阵如图2所示。此处将 $U^+(n, k)$ 记为 $U(n+k, -k)$,故 k 可取6个方向;用“|”表示取3个方向的泡利矩阵 $\sigma_j(j=1,2,3)$,用“||”表示取6个方向的 $\sigma_k(k=\pm 1, \pm 2, \pm 3)$ 。

如果在同一空间点上有一对相同的颜色指标求和,则把标有这指标的两个端点连起来(规范链两端都被认为标有颜色指标),例如:

$$\sum_{c,c'} \xi_c^+(n) \sigma_k U^{cc'}(n, k) \eta_{c'}^+(n+k)$$

用图形(图3)的组合代替代数算法中的Wick展开是很方便的,在某些情况还可以使计算量大大减小。通过图形的组合完成了矩阵元的Wick展开后,将得到一些相连的平面曲线,称作收缩图。将在第三节详细讨论。

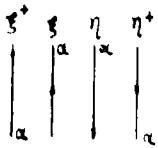


图 1

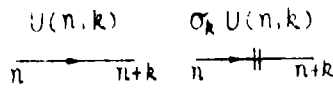


图 2



图 3

图形的另一种意义是可以用来表示矩阵元中夸克场和规范链的时空关系。将收缩图按照规范链在空间上的各种安排做成立体的封闭图,这些图有比较直观的意义,它们的贡献亦不难求出(见第四节),仍称之为Feynman图。

2 图算法—收缩图

在矩阵元的解析表达式中,费米子总是两两成对地组成颜色和自旋标量(中间可能夹着一个或多个规范链及自旋泡利矩阵),我们称之为基本单元。在图形中表现为费米场的带指标端总是和另一费米场的带指标端直接或通过规范链及泡利矩阵相连在一起。由于费米子数守恒,费米子线的箭头方向给图形规定了唯一的流向(图4—6)。

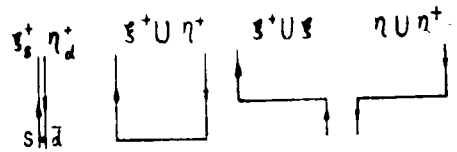


图 4

其中已引入改变夸克线味道的记号(图7)。

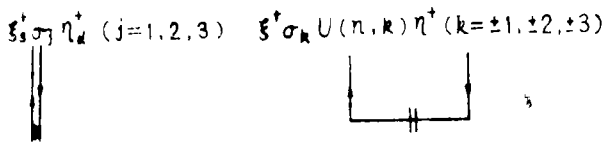


图 5



图 6

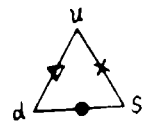


图 7

- $s \leftrightarrow d: \quad \bullet$
- $s \leftrightarrow u: \quad \times$ 或记为图7
- $d \leftrightarrow u: \quad \triangle$

至此，我们已经可以把强作用顶角 V_1, V_2 和弱作用顶角 O_w “翻译”成图形(图8—11)。

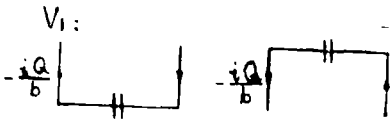


图 8

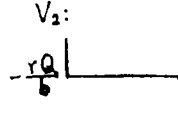


图 9

以后我们约定，凡是图上没有明确标出的指标(n, k, c, s, f)和流向都隐含着对这些指标和流向求和。例如 V_1 的两个图隐含着对 n, k, c, s, f 求和，而 V_2 的图除了对上述指标求和外还隐含着对流向求和(图12)。最后一个等号的负号由费米子的反对易性所得，交换两条费米子线的左右顺序给图带来一个负号。



图10



图11

两个费米场的收缩

$$\xi_\alpha \xi_\beta^+ = \langle \xi_\alpha, \xi_\beta^+ \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

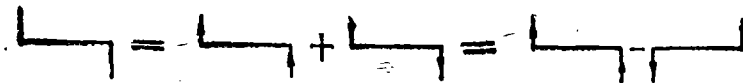


图 12

相应的图形操作为图13所示。

右边的图形便是费米子传播子，它的两端都不再开放，换句话说，它的两端都与其它图形粘连着。从这个例子很容易推广到一般的情况：一费米子传播子是两端具有相同指标的线段，由两条费米子线粘合而得，粘合之前消灭算符在左边，产生算符在右边。下面是常见的两个收缩实例(图14)。其中负号均由由于粘合前需要交换一对费米子的顺序。

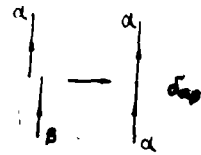


图 13

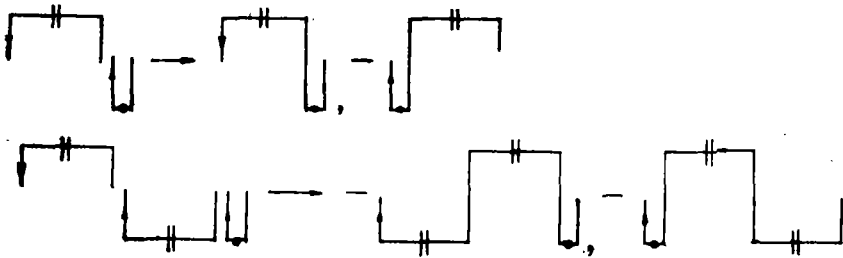


图 14

波函数的各级修正图可由零级函数图出发,依次加入强作用顶角而得。若已知波函数的 $q-1$ 级修正图,则第 q 级修正图可按下列步骤得到:

- ①把强作用顶角图放在 $q-1$ 级图的左边;
- ②如果顶角图有下垂线(消灭算符),则以各种可能的方式把它与 $q-1$ 级图的上升线(产生算符)粘合起来,每交换一对费米子线给出一个负号;
- ③形状相同的图形只保留一个(基本单元的左右排列次序是任意的,同一基本单元中顶角的时间次序亦不与考虑);
- ④若顶角的下垂线不能全部收缩掉,则这项等于零。

例: K^+ 介子波函数的一级修正图

零级波函数 $|K^+, 0\rangle$ 的图形(图15)。 波函数一级修正图(图16—17)。



图 15

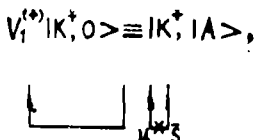


图 16

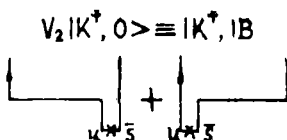


图 17

在上面的“运算”中略去了能量因子,在仅分析夸克的收缩方式时,这样做是允许的。

一个矩阵元可以写成 $\langle \phi_2 | O_w | \phi_1 \rangle$, 将它“翻译”成图形,我们将看到 $|\phi_1\rangle$ ($\langle \phi_2$) 的费米子线全部向上(向下), O_w 可能兼有向上和向下的费米子线。将所有向下的线 与所有向上的线以各种可能的方式粘合起来,则得到矩阵元的Wick展开——各种收缩图。其中要注意每个闭合圈有唯一的流向,味道和给定的初、末态不矛盾;交换一对费米子中一个负号。考虑下面两点可使需要计算的图大大减少:

①循环或倒置后形状相同的收缩图贡献相同。循环不变是因为求迹运算下算符可以循环置换,而倒置不变是由于矩阵元共轭不变。(图18—22)。

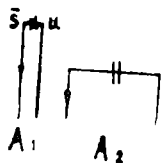


图 18

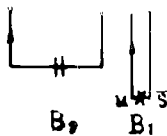


图 19

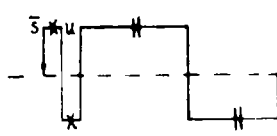


图 20

例: $\langle 1A, K^+ | K^+, 1A \rangle$

末态 $\langle 1A, K^+ |$:

初态 $|K^+, 1A \rangle$:

收缩方式 (i) $A_1 B_1 A_2 B_2$:

(ii) $A_1 B_2 A_2 B_1$:

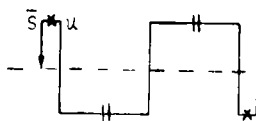


图 21

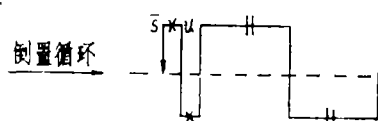


图 22

故两种收缩方式贡献相同。

②如果两个初(末)态在不考虑各个顶角进入的时间顺序时不能区分,并且在两个状态的图形之间,不相同的顶角的时间排列方式完全对应,则这两个状态贡献相同(图23—25)。

例:下面四个初态贡献相同:

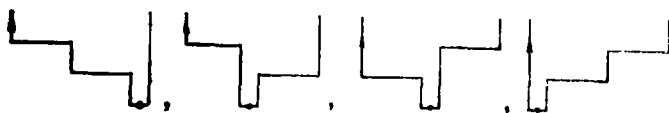


图 23

下面两个初态贡献相同:

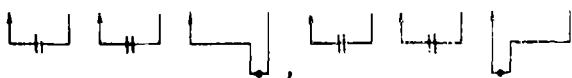


图 24

下面三个初态贡献不相同:

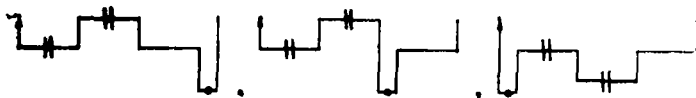


图 25

3 图算法—Feynman图

在收缩图中,夸克线全部收缩掉后留下一些相连的封闭圈。每一个封闭圈隐含着对颜色和自旋求迹。一个封闭圈的自旋迹不为零的条件是圈内的泡利矩阵可以两两配成方向相同或相反的对。颜色迹的计算需要先确定规范链在空间方向上的组合。这就是将收缩图画成Feynman图。

因为非一维表示的规范链在强耦合真空的平均值等于零,所以每条空间链上的规范场在一维表示的投影都不能为零。下面是一些Feynman图的例子(图26—27)。

例: $\langle K^0 | K^0 \rangle$ 的几个四阶修正图收缩图。

相应的Feynman图。



图 26

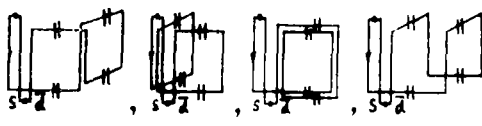


图 27

其中要小心区分的是重叠图和不重叠图。重叠图是指初态(或末态)在同一空间链上有多于一条规范链(图27-c)。我们知道一条规范链 $U(n, k)$ 是颜色群 $SU(3)$ 的 $(3, \bar{3})$ 表示,它贡献的能量 $E_3 = 4/3$;若在同一空间链上有两个规范场: $U_{c\bar{c}}(n, k) U_{c'\bar{c}'}(n, k)$ 或 $U_{c\bar{c}}^+(n, k) U_{c'\bar{c}'}(n, k)$,则这一空间链上的规范场不是能量的本征态,即是 $SU(3)$ 的可约表示。按照表示分解理论, $(3, \bar{3}) \times (3, \bar{3}) = (6, \bar{6}) + (\bar{3}, 3)$; $(\bar{3}, 3) \times (\bar{3}, 3) = (1, 1) + (8, \bar{8})$ 。 $(6, \bar{6})$ 表示的规范场的能量为 $E_6 = 10/3$, $(8, \bar{8})$ 表示的规范场的能量为 $E_8 = 3$ 。算到强耦合展开的第四阶,在求颜色迹时要用到下列公式:

$$\langle 0 | U_{\alpha\beta}^n U_{\gamma\delta}^{\bar{n}} | 0 \rangle = \frac{1}{n} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \tag{1a}$$

$$\langle 0 | U_{ij} U_{kl} P(3) U_{rs}^+ U_{pq}^+ | 0 \rangle = \frac{1}{12} \{ \delta_{is} \delta_{kq} - \delta_{iq} \delta_{sk} \} \{ \delta_{jr} \delta_{lp} - \delta_{jp} \delta_{rl} \} \tag{1b}$$

$$\langle 0 | U_{ij} U_{kl} P(\bar{6}) U_{sr}^+ U_{ut}^+ | 0 \rangle = \frac{1}{24} \{ \delta_{ir} \delta_{kt} + \delta_{it} \delta_{kr} \} \{ \delta_{js} \delta_{lu} + \delta_{ju} \delta_{sl} \} \tag{1c}$$

$$\langle 0 | U_{ij} U_{lk}^+ P(8) U_{rs} U_{ui}^+ | 0 \rangle = \frac{1}{32} \{ 2\delta_{it} \delta_{rk} - \frac{2}{3} \delta_{ki} \delta_{rt} \} \{ 2\delta_{uj} \delta_{sl} - \frac{2}{3} \delta_{jl} \delta_{su} \} \tag{1d}$$

其中 U^n 为 (n, \bar{n}) 表示的规范链, $P(n)$ 为投影算符, 将它右边的规范链乘积(可约表示)投影到 (n, \bar{n}) 表示。在上一个例子中, (a)、(b)图的颜色迹为3, (c)图在 $(\bar{3}, 3)$ 分解中的迹为-3, 在 $(6, \bar{6})$ 分解中的迹为6。

一个Feynman图的贡献总结起来可写成:

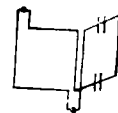
$$G = \sum_n \sum_{T_i, T_f} \cdot \sum_{\{k\}} \delta \cdot S \cdot R_c R_s P_i P_f^* \cdot N \tag{2}$$

其中 \sum_n 为对重叠链的各种表示分解求和, $T_i(T_f)$ 为初(末)态各个强作用顶角的时间顺序, $\sum_{\{k\}}$ 为对图中没有确定的空间方向求和, δ 为收缩带来的符号因子, S 为贡献相同的波函数及收缩方式引起的对称因子, R_c, R_s 分别为颜色迹和自旋迹, 初末态波函数所带的能量因子分别记为 P_i 和 P_f^* , 式中 N 为格点数(可以证明, N 平方以上的项互相抵消)。

在给定时序 T_i 和表示分解下, 初态(末态的情况完全类似)波函数的系数 P_i 不难求出。在时间方向上, 每增加一个强作用顶角, 该时间截面 t 上就有一个能量因子 $aQ/b = a/(E_0 - E(t))$ 。此处 E_0 为零级波函数的能量, $E(t)$ 为 t 截面上状态的能量(若 $E_0 = E(t)$, 则这一项没有贡献)。对应顶角 $V_1, \alpha = -i$; 对应顶角 $V_2, \alpha = -r$ 。将各个时间截面上的因子乘起来便得到初态波函数的系数 P_i 。

例 Feynman图(图28)。

初态有两种时序, (图29(a)、(b))。



(不重叠)

图 28

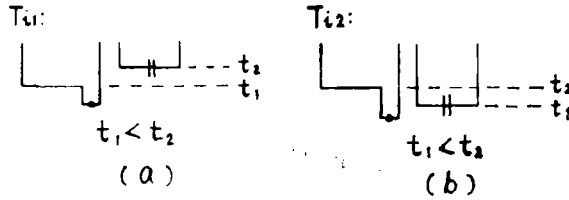


图 29

$E_0 = 2bf$, $bf = 6rx + m$, 每条夸克线贡献一个 bf 。

$$P(t_1) = -r/(E_0 - E(t_1)) = -r/(2bf - (4/3 + 2bf)) = \frac{3r}{4}$$

$$P(t_2) = -i/(E_0 - E(t_2)) = -i/(2bf - (2 \times \frac{4}{3} + 4bf)) = \frac{i}{8/3 + 2bf}$$

$$P_{r_{i1}} = 3ri/4(8/3 + 2bf) \tag{3}$$

$$P(t_1) = i/(4/3 + 2bf), P(t_2) = r/(8/3 + 2bf)$$

$$P_{r_{i2}} = ri/(4/3 + 2bf)(8/3 + 2bf) \tag{4}$$

第 q 级能量修正为

$$E_q = \langle \psi_0 | V_1 + V_2 | \psi_{q-1} \rangle$$

插入单位算符 $b \cdot \frac{1}{b}$, 上式可写成

$$E_q = \langle \psi_0 | (V_1 + V_2) b \cdot \frac{1}{b} | \psi_{q-1} \rangle \tag{5}$$

其中 $b = E_0 - W_0$, 因 $|\psi_{q-1}\rangle$ 前有投影算符 Q , 故

$$E_q = \langle \psi_0 | (V_1 + V_2) b \cdot \frac{Q}{b} | \psi_{q-1} \rangle = \sum_i \langle \psi_1, E_i | \psi_{q-1} \rangle E_i \tag{6}$$

其中 $\langle \psi_1, E_i |$ 表示波函数一阶修正中, 能量为 E_i 的波函数修正图。通过上式, 能量修正也可以用前面介绍的图算法计算。类似技巧还可以得到一类Feynman图与另一类Feynman图之间的关系, 无论对减少工作量和作自洽检验都是很有用的。

4 | ΔS | = 2矩阵元强耦合展开的前两级

与 K_L 和 K_S 介子质量差有关的矩阵元为

$$\mathcal{M} = \langle K^0 | O_{eff} | \bar{K}^0 \rangle / \langle K^0 | K^0 \rangle \tag{7}$$

$$\text{其中 } O_{eff} = \bar{\psi}_d \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_s \bar{\psi}^u (1 - \gamma_5) \psi_s \tag{8}$$

零级波函数(图30)为

一级波函数修正图(图31)为

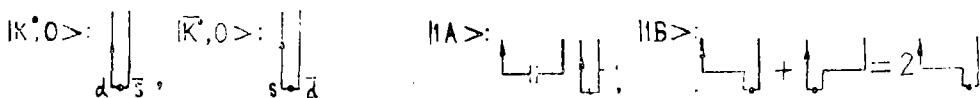


图 30

图 31

O_{eff} 中有贡献的图形有(图32)

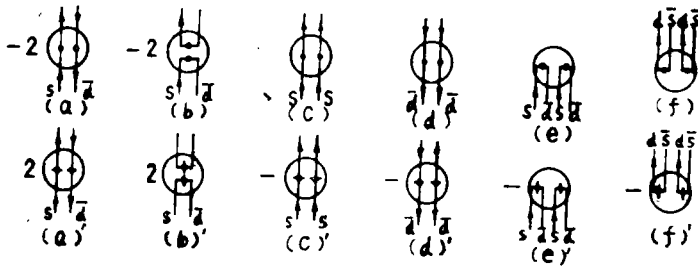


图 32

①归一化因子 $\langle K^0 | K^0 \rangle$

(9)

零阶图 g_0 (图33):

$$\delta = +, \quad R_s = 2, \quad R_c = 3 \quad g_0 = 6$$

一阶图等于零, 二阶图(图34, 35)为:



图 33

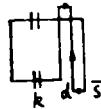


图 34

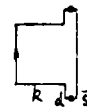


图 35

g_{IA} :

$$\begin{aligned} \delta &= -1, \quad S = 2, \quad R_s = 2, \quad R_c = 3, \\ P_i &= P_f = i/(4/3 + 2bf), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ g_{IA} &= -12g_0 \left(\frac{4}{3} + 2bf \right)^{-2} \end{aligned} \quad (10)$$

g_{IB} :

$$\begin{aligned} \delta &= 1, \quad S = 4, \quad R_s = 2, \quad R_c = 3, \\ P_i &= P_f = 3r/4, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ g_{IB} &= 24 \left(\frac{3r}{4} \right)^2 g_0 \end{aligned} \quad (11)$$

②弱矩阵元 $\langle K^0 | O_{eff} | \bar{K}^0 \rangle$

将弱顶角的图以各种可能的方式插入到归一化因子的Feynman图中, 可以得到相应的弱矩阵元的Feynman图。

与 g_0 相应的弱矩阵元 g_{w0} : 可以插入的弱顶角有(a)、(b)、(a)'。(a)顶角不改变图 g_0 , 故贡献为 $-2g_0$; (b)顶角可从(a)顶角中交换一对费米子线而得, 故增加一个负号, 另外还多了一个圈, 故有两个颜色和自旋的迹, 总贡献为 $2g_0^2$; (a)'顶角有一对泡利矩阵, 对泡利矩阵的空间方向求和出一个因子3, 故其贡献为 $2 \cdot 3g_0$, 故

$$g_{w_0} = -2g_0 + 2g_0^2 + 2 \cdot 3g_0 = 16g_0 \quad (12)$$

与 g_{IA} 相应的弱矩阵元 g_{wIA} : 可插入的弱顶角同上, 有两种插法 (图36)

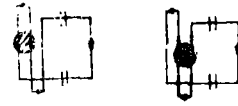


图 36

故

$$g_{wIA} = 2 \cdot 16g_{IA} = 32g_{IA} \quad (13)$$

没有弱顶角可以插入到 g_{IB} 中, 故 $g_{wIB} = 0$.

另外, 没有相应的归一化Feynman图的弱Feynman图还有零阶波函数与二阶波函数修正的交叉项 (图37)

$$g_{w_0, 2A}: \quad g_{w_2 A, 0} = g_{w_0, 2A}^+$$

有贡献的Feynman图为 (图38):

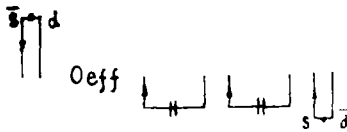


图 37

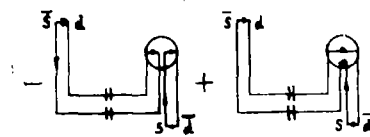


图 38

对第一个图, $\delta = -1, S = 1, R_s = -4, R_c = 9, P_i = i^2/4bf \left(\frac{4}{3} + 2bf \right), P_f = 1, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, 贡献为 $\sum_i (-1)(-4) \cdot 9 \cdot 6 \cdot i^2/4bf \left(\frac{4}{3} + 2bf \right) = \sum_i -36g_0/4bf \left(\frac{4}{3} + 2bf \right)$. 第二个图与前图不同的地方是 $\delta = +, R_s = -2, R_c = 3$, 再考虑到有两种贡献相同的时序, 顶角(e)的贡献为 $-3 \cdot 5 g_0/bf \left(\frac{4}{3} + 2bf \right)$.

对于顶角(e)', 只有上面第二个图的收缩方式有贡献, 由于泡利矩阵空间方向的求和增加一个因子3, 顶角本身带一个负号, 故它的贡献为 $-3 \cdot 3g_0/bf \left(\frac{4}{3} + 2bf \right)$. 故

$$g_{w_0, 2A} = -24g_0/bf \left(\frac{4}{3} + 2bf \right) \quad (14)$$

总结前面的结果得

$$\frac{\langle K^0 | O_{eff} | \bar{K}^{10} \rangle}{\langle K^0 | K^0 \rangle} = \frac{16 - [384 \left(\frac{4}{3} + 2bf \right)^{-2} + 48b_f^{-1} \left(\frac{4}{3} + 2bf \right)^{-1}] x^2}{1 - [12 \left(\frac{4}{3} + 2bf \right)^{-2} - 27r^2/2] x^2} \quad (15)$$

我们已经应用本文介绍的图算法计算了 $K_L - K_S$ 质量差和与 $|\Delta I| = 1/2$ 增强有关的弱矩阵元 (匀准至 x 的四次项), 得到较为满意的结果。

参 考 文 献

- [1] K.G.Wilson, *Phys. Rev.*, **D10** (1974),1445.
[2] J.Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 395.
J. Shigemitsu, *Phys. Rev.*, **D18** (1978), 1709.
T. Banks, S. Raby and et. al., *Phys. Rev.*, **D15** (1977),1111.
[3] N. Cabibbo, G.Martinelli and R. Petronzio,
Nucl. Phys., **B.244** (1984),381—391.
C. Bernard, T. Draper, et. al.,
Phys Rev. Lett., **55**(1985),**25**, 2770;
I. G. Anguss, *CALT—68—1362 (preprint)*, June(1986).

The Diagrammatic Method on the Strong Coupling Expansion in Lattice QCD

Li Zhibing Chen Qizhou He Baopeng
Luo Xiangqian Guo Shuohong

Abstract

We have given a new method on the strong coupling expansion in lattice QCD. It has both the advantages of the Feynman diagrams and those of the algebraic method. As an example, We computed the first two order approximations of the $|\Delta S|=2$ matrix elements on the strong coupling expansion.

Keywords Lattice QCD, diagrammatic method