中山大学学报
1986年第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI No. 4, 1986

·研究简报·

一类具有连续时滞生态系统的稳定性

徐远通
（数学系）

§1. 模型

本文讨论m个相互作用的物种，设种内生长率及相互作用项均非线性地依赖于过去的种群密度，整个种群动态由下述方程组表示：

$$\dot{x}_i(t)=x_i(t)\left\{b_i+g_i\left(x_1(t),\cdots,x_m(t),\int_{-\infty}^{t}f_{i1}(t-\tau)x_1(\tau)d\tau,\cdots,\int_{-\infty}^{t}f_{im}(t-\tau)x_m(\tau)d\tau\right)\right\}$$

$$i\in M=\{1,2,\cdots,m\} \tag{1.1}$$

这里b_i是实数，g_i是连续函数，$f_{ij}:[0,\infty)\to R$是规格化的非负函数，按通常假定为：

$$f_{ij}(t-\tau)=\sum_{k=1}^{n_{ij}}c_{ij}^{(k)}f_{ij}^{(k)}(t-\tau),\quad c_{ij}\geqslant 0,\quad \sum_{k=1}^{n_{ij}}c_{ij}^{(k)}=1,$$

$$f_{ij}^{(k)}(t-\tau)=\frac{a_{ij}^{k}}{(k-1)!}(t-\tau)^{k-1}\exp\left[-a_{ij}(t-\tau)\right],\quad a_{ij}\geqslant 0,\ i,j\in M. \tag{1.2}$$

对于模型(1.1)，若g_i是变元的线性函数，则Volterra在1931年[8]已对$m=2$情况作了研究，近五十年来，对$m\geqslant 2$各种情形也已作了大量研究[1-7]。本文主要考虑g_i是非线性函数的情形。

§2. 非负平衡状态的存在条件

我们用R^n表示n维欧氏空间，对X，$Y\in R^n$，记号$X>Y$或$X\geqq Y$分别表示$x_i>y_i$或$x_i\geqq y_i$，$i=1,2,\cdots n$。而$X\geqslant Y$则表示$X\geqq Y$且$X\neq Y$。令$y_i=x_i$，$i\in M$，并定义p个函数如下：

$$y_{ij}^{(k)}=\int_{-\infty}^{t}f_{ij}^{(k)}(t-\tau)x_j(\tau)d\tau,\quad i,j\in M,\quad K=1,2,\cdots,n_{ij}$$

● 本文1984年12月收到，1986年7月收到修改稿
本项研究得到中山大学高等学术研究中心基金会资助

代入系统(1.1)，模型可写为：

$$\begin{cases} \dot{y}_i = -y_i[B_i + G_i(y_1,\cdots,y_m,y_{11}^{(1)},\cdots,y_{mm}^{(n_{mm})})], \quad i\in M \\ \dot{y}_{ij}^{(k)} a_{ij} = (y_{ij}^{(k-1)} - y_{ij}^{(k)}), \quad i,j\in M, \quad k=1,2,\cdots,n_{ij} \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $y_{ij}^{(0)} = y_j, B_i = -b_i,\ i,j\in M$，而$G_i: R^{m+p}\to R$定义为

$$G_i(y_1,\cdots,y_m,y_{11}^{(1)},\cdots,y_{mm}^{(n_{mm})}) = -g_i(y_1,\cdots,y_m,\sum_{k=1}^{n_{i1}} c_{i1}^{(k)} y_{i1}^{(k)},\cdots,\sum_{k=1}^{n_{im}} c_{im}^{(k)} y_{im}^{(k)})$$

用向量形式表示为：

$$\dot{Y} = -\begin{pmatrix}\mathrm{diag}Y_m & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}[B+G(Y)] \tag{2.2}$$

这里$Y=(Y_m,Y_p)^T\in R^{m+p}$，$Y_m=(y_1,\cdots,y_m)\in R^m, Y_p=(y_{11}^{(1)},\cdots,y_{mm}^{(n_{mm})})\in R^p$，常向量$B=(B^{(m)},B^{(p)})^T$，$B^{(m)}=(B_1,\cdots,B_m)$，$B^{(p)}=(B_{m+1},\cdots,B_{m+p})$实际是$p$维零向量，$E_p$是$p$阶单位矩阵，$G=(G^{(m)},G^{(p)})^T, G^{(m)}=(G_1,\cdots,G_m)\in R^m, G^{(p)}=(G_{m+1},\cdots,G_{m+p})$ $=(a_{11}y_{11}^{(1)}-a_{11}y_{11}^{(0)},\cdots,a_{mm}y_{mm}^{(n_{mm})}-a_{mm}y_{mm}^{(n_{mm}-1)})$，

易知系统(1.1)与系统(2.1)有解的等价性，若$\phi_i(t)$是非负连续函数，(2.1)对于初值问题$y_i(0)=\phi_i(0), y_{ij}^{(k)}(0)=\int_{-\infty}^{0} f_{ij}^{(k)}(t-\tau)\phi_i(\tau)d\tau$，$ij\in M$，$k=1,2,\cdots,n_{ij}$的解相应就是(1.1)中$x_i(t)=\phi_i(t)$，$t\in(-\infty,0]$，$i\in M$的解，反之亦然，故系统(1.1)解的性质可转化为系统(2.1)来研究。

现设系统(2.1)的平衡点为Y^*，当Y^*是非负平衡点时，保证Y^*为稳定的必要条件[9]是

$$G(Y^*)+B\geqq 0 \tag{2.3}$$

以下均以此条件作为自然的限制。在非线性规划中，寻求向量$Z\in R^n$，使得对$B\in R^n$，$G: R^n\to R^n$有

$$a)\ Z\geqq 0,\quad b)\ G(Z)+B\geqq 0,\quad c)\ Z^T[G(Z)+B]=0 \tag{2.4}$$

称为非线性补问题，记为$NCP(G,B)$。

定理1　系统(2.1)适合关系式(2.3)的非负平衡点存在性等价于$NCP(G,B)$解的存在性。

证　若Y^*是(2.1)适合(2.3)的非负平衡点，则$Y_m^*[B^{(m)}+G^{(m)}(Y^*)]^T=0$，及$B^{(p)}+G^{(p)}(Y^*)=0$，计及

$$(Y_m^*,Y_p^*)[G(Y^*)+B] = Y_m^*[B^{(m)}+G^{(m)}(Y^*)]^T + Y_p^*[B^{(p)}+G^{(p)}(Y^*)]^T$$

有$Y^{*T}[G(Y^*)+B]=(Y_m^*,Y_p^*)[G(Y^*)+B]=0$，因$Y^*\geqq 0$及$G(Y^*)+B\geqq 0$，故$Y^*$是$NCP(G,B)$的解。

反之，若$\hat{Y}$是$NCP(G,B)$的解，记$\hat{Y}=(\hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_{m+p})$当$\hat{y}_s>0$时，显然$\dot{y}_s|_{Y=\hat{Y}}=0$；当$\hat{y}_s=0$时，对$s\in M$有$\dot{y}_s|_{Y=\hat{Y}}=0$，对$s\bar{\in}M$，则有$i,j,k$使$\hat{y}_s$相应于$\hat{y}_{ij}^{(k)}$，

$$\dot{y}_s|_{Y=\hat{Y}} = a_{ij}(\hat{y}_{ij}^{(k-1)} - \hat{y}_{ij}^{(k)}) = a_{ij}\hat{y}_{ij}^{(k-1)}$$

由$\hat{Y}\geqq 0$知$\dot{y}_s|_{Y=\hat{Y}}\geqq 0$，但另一方面由$G_s(\hat{Y})+B_s\geqq 0$，

$$\dot{y}_s|_{Y=\hat{Y}} = -[B_s + G_s(\hat{Y})]\leqq 0$$

可见$\dot{y}_s|_{Y=\hat{Y}}=0$仍然成立，即$\hat{Y}$是非负平衡点，因$\hat{Y}$适合(2.4)必适合(2.3)，定理得证。

以下记$\tilde{G}=(\tilde{G}_1,\cdots,\tilde{G}_m)$，$\tilde{G}_i=-g_i(y_1,\cdots,y_m,y_1,\cdots,y_m)$，则有：

推论　如果$Z=(Y_m^*)^T$是$NCP(\tilde{G},B^{(m)T})$的解，且$y_j^*=y_{ij}^{(k)*}$，$i,j\in M,k=1,2,\cdots,n_{ij}$，则$Y^*=(Y_m^*,y_p^*)^T$是(2.1)适合(2.3)的非负平衡点，反之亦成立。

证　若Z是上述$NCP(\tilde{G},B^{(m)T})$的解，则$Y^*\geqq 0$，且显然使(2.1)的第二式右端为零。此外，若对$s\in M$有$y_s^*=0$，则$\dot{y}_s|_{Y=Y^*}=0$；若有$y_s^*>0$，则由于$y_j^*=y_{ij}^{(k)*}$有

$y_j^*=\sum_{k=1}^{n_{ij}} c_{ij}^{(k)} y_{ij}^{(k)*}$知$\tilde{G}_s(Z)=G_s(Y^*)$，于是，由$Z^T[\tilde{G}(Z)+B^{(m)T}]=0$及$y_s^*>0$知$G_s(y^*)+B_s=0$，仍有$\dot{y}_s|_{Y=Y^*}=0$，故$Y^*$是适合(2.3)的非负平衡点。

反之，由定理1知Y^*适合$NCP(G,B)$，再由推论条件知$(Y_m^*)^T$适合$NCP(\tilde{G},B^{(m)T})$。

§3. 非负平衡状态的稳定性

本节，用以下记号表示各种类型的集合：

$R_+^{m+p}=\{Y|Y\in R^{m+p},\ Y\geqslant 0\}$，$R_{+0}^{m+p}=\{Y|Y\in R^{m+p},\ Y\geqq 0\}$，

$R_I^{m+p}=\{Y|Y\in R^{m+p};y_i\geqq 0,i\ni I;\ y_i>0,i\notin I\},I\subset\{1,2,\cdots,m+p\}$。

设$Y^*=(y_1^*,\cdots,y_{m+p}^*)^T$是(2.1)的非负平衡点，$y_i^*=0$，$i\in I$；$y_i^*>0,i\notin I$。相应定义如下集合：

$\mathbf{Y}_I^+=\{Y|Y-Y^*\geqq 0,\ Y\in R_I^{m+p}\}$，$\mathbf{Y}_I^-=\{Y|Y-Y^*\leqq 0,Y\in R_I^{m+p}\}$

记$\mathbf{Y}_B^+=\{Y|G(Y)+B\geqq 0,Y\in P_{+0}^{m+p}\}$，相应有：

$\mathbf{Y}_{BI}^+=\{Y|G(Y)+B\geqq 0,Y\in R_I^{m+p}\}$，$\mathbf{Y}_{BI}^-=\{Y|G(Y)+B\leqq 0,Y\in R_I^{m+p}\}$

我们引入非负平衡点关于集合s全局稳定定义：

定义1　如果系统(2.1)的平衡点Y^*满足：任给$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，使初值Y^0适合$|Y^0-Y^*|<\delta$的解$Y(t)\in s$，对一切$t\geqq 0$有$|Y(t)-Y^*|<\varepsilon$，且自s出发的解$Y(t)$当$t\to\infty$时趋于Y^*，则称Y^*关于s全局稳定。

本节，对系统(2.1)假设$G:R_{+0}^{m+p}\to R^{m+p}$是$M$函数，其定义如下(参见[10])：

定义2　函数$G=(G_1,\cdots,G_{m+p})$称为M函数，若对$X,Y\in R_{+0}^{m+p}$，当$X\geqslant Y$，$x_i=y_i$时$G_i(X)\leqslant G_i(Y)$，且当$G(X)\leqslant G(Y)$时$X\leqslant Y$。

引理1 [10] 设$G\in C(R_{+0}^{m+p},\ R^{m+p})$是拟单调不增的(即当$X\geqslant Y$，$x_i=y_i$时$G_i(X)\leqslant G_i(Y)$)，若$\mathbf{Y}_B^+\neq\phi$且$Z$是$NCP(G,B)$的解，则对$Y\in\mathbf{Y}_B^+$有$Z\leqq Y$；对一切$B\in R^{m+p}$，$NCP$

(G,B)有解的充要条件是

$$\{Y|Y\geqq G(0)\}\subseteq G(R_{+0}^{m+p}) \tag{3.1}$$

此外，若G是M函数，则$NCP(G,B)$最多只有一解。

引理 2 [9] 设G是连续拟单调不增函数，系统(2.1)初值为$\alpha,\beta\in R_{+0}^{m+p}$的解为$x^{\alpha}(t)$及$x^{\beta}(t)$，$\alpha>\beta$，则$x^{\alpha}(t)\geqq x^{\beta}(t)$，对一切$t\geqq 0$。

下面，对系统(2.1)作如下基本假设(H)为：

$G(0)=0$；G是M函数且$G\in C^1(R_{+0}^{m+p},R^{m+p})$；$R_{+0}^{m+p}\subseteq G(R_{+0}^{m+p})$。

定理 2 如果基本假设(H)成立。任给$B\in R^{m+p}$则系统(2.1)有唯一适合(2.3)的非负平衡点Y^*，此平衡点关于$\mathbf{Y}_I^+$全局稳定。

证 由(H)知G满足引理1，故$NCP(G,B)$有唯一解，再由定理1知(2.1)有唯一适合(2.3)的非负平衡点Y^*存在。

此时，相应于Y^*，集合$\mathbf{Y}_{BI}^+$是正不变集。事实上，$\mathbf{Y}_{BI}^+\neq\phi$，故由引理1对$Y\in\mathbf{Y}_{BI}^+$，$Y^*\leqq Y$，即$\mathbf{Y}_{BI}^+\subseteq\mathbf{Y}_I^+$，故$\mathbf{Y}_{BI}^+=R_I^{m+p}\cap\mathbf{Y}_B^+$.而知$R_I^{m+p}$是正不变的，现只需证明$\mathbf{Y}_B^+$是正不变集，为此，令

$$Z=G(Y)+B,\ Z=(Z_1,\cdots,Z_{m+p})^T \tag{3.2}$$

则$\mathbf{Y}_B^+$变为$\mathbf{Z}=\{Z|Z\geqq 0,Y\in R_{+0}^{m+p}\}$，计及

$$\frac{dZ}{dt}=\frac{d}{dt}G(Y)=\frac{\partial G}{\partial Y}\frac{dY}{dt}=-\frac{\partial G}{\partial Y}\begin{pmatrix}\mathrm{diag}\,y_m & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix}Z \tag{3.3}$$

因G是M函数故$\frac{\partial G_i}{\partial y_i}\leqq 0$，$i\neq j,i,j,=1,\cdots,m+p$。于是，对$Z_i=0$，$Z_j\geqq 0\ (j\neq i)$，$Y\in R_I^{m+p}$有$\frac{dZ_i}{dt}\geqq 0$，$i=1,2,\cdots,m+p$。可见$\mathbf{Z}$是正不变集，从而$\mathbf{Y}_B^+$正不变，因此，$\mathbf{Y}_{BI}^+$是系统(2.1)的正不变集。

其次，可证明Y^*关于$\mathbf{Y}_{BI}^+$是全局稳定。事实上，令$V(Y)=\sum\limits_{i=1}^{m+p}(y_i-y_i^*)$，则$V(Y)\geqq 0$而且$V(Y)=0$仅当$Y=Y^*$时才成立（对一切$Y\in\mathbf{Y}_{BI}^+$），计及

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.1)}=-\left[\sum_{i=1}^{m}y_i(G_i(Y)+B_i)+\sum_{j=m+1}^{m+p}(G_j(Y)+B_j)\right] \tag{3.4}$$

则对$Y\in\mathbf{Y}_{BI}^+$，$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.1)}\leqq 0$，且$\frac{dV}{dt}=0$仅当$Y=Y^*$，由$Lasalle$不变性原理知$Y^*$关于$\mathbf{Y}_{BI}^+$全局稳定。

最后，往证Y^*关于Y_I^+是全局稳定的。事实上，对$Y^0\in R_I^{m+p}$可选取$W\in R_+^{m+p}$，使得$W>G(Y^0)+B$且$W>B$，由基本假设(H)知有u使$G(u)=W-B$，计及G是M函数，则$u\in\mathbf{Y}_{BI}^+$，$0\leqq Y^0<u$，利用引理2，自Y^0及u出发的解$Y^0(t)$及$Y^u(t)$适合$0\leqq Y^0(t)\leqq Y^u(t)$，

（对一切$t\geq 0$成立）。而上面已知Y^*关于Y^+_{Bl}全局稳定，故$\lim\limits_{t\to\infty}Y^u(t)=Y^*$，从而$0\leqq\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}Y^0(t)\leqslant Y^*$；另一方面，对一切$Y^0\epsilon\mathrm{Y}^+_l$，类似上述有$\eta\epsilon\mathrm{Y}^+_{Bl}$使得$Y^*\leqq Y^0<\eta$，由引理2知，对一切$t\geqq 0$，$Y^*\leqq Y^0(t)\leqq Y^\eta(t)$，于是，$\lim\limits_{t\to+\infty}Y^0(t)=Y^*$，这时即可推知$Y^*$关于$\mathrm{Y}^+_l$是全局稳定的。证毕。

下面将考虑平衡点Y^*关于R^{m+p}_l的全局稳定性，这种平衡点简称为"稳定平衡状态"。

定理3 如果基本假设(H)成立，则系统(2.1)对$B^{(m)}\geqq 0$或$B^{(m)}<0$均存在唯一非负稳定平衡状态。

证 实际上，由(H)成立知系统(2.1)有适合(2.3)式唯一的非负平衡点Y^*，而当$B^{(m)}\geqq 0$时，$Y=0$是系统(2.1)适合(2.3)式的非负平衡点，故有$Y^*=0$，$Y^+_l=R^{m+p}_l=R^{m+p}_{+0}$，由定理2知$Y^*$是唯一非负稳定平衡状态。

当$B^{(m)}<0$时，由(H)知$G^{(m)}(Y_m)=-B^{(m)}$在R^m_{+0}上有解Y^*_m，取$y^{(k)*}_{ij}=y^*_j$，$i,j\epsilon M$，$k=1,2,\cdots,n_{ij}$可构造出Y^*_p，令$Y^*=(Y^*_m,Y^*_p)^T$则$Y^*\epsilon R^{m+p}_{+0}$，且$G(Y^*)+B=0$。此时，$Y^*\epsilon\mathrm{Y}^+_{Bl}$，$Y^*\epsilon\mathrm{Y}^-_{Bl}$，因$Y^*$是适合(2.3)的非负平衡点，从定理2知$Y^*$关于$\mathrm{Y}^+_{Bl}$全局稳定；另一方面，按定理2类似方法可证明$Y^*$关于$\mathrm{Y}^-_{Bl}$全局稳定。因此，根据$\mathrm{Y}^+_{Bl}$及$\mathrm{Y}^-_{Bl}$的定义便知$Y^*$是唯一非负的稳定平衡状态。定理证毕。

进一步，我们讨论$B^{(m)}$各分量不同号的情形，假定$B^{(m)}=\begin{pmatrix}B^{(I)}\\B^{(J)}\end{pmatrix}$，$B^{(I)}=(B_1,\cdots,B_i)^T$，$B^{(J)}=(B_{i+1},\cdots,B_m)^T$，这里$B_s<0$，$s=1,2,\cdots,i$，$B_s\geqq 0$，$s=i+1,i+2,\cdots,m$，有以下结论：

定理4 如果基本假设(H)成立，对上述$B^{(m)}$，设存在$Y^*_m=(y^*_1,\cdots,y^*_l,0,\cdots,0,)^T$，$l\leqslant i$，令$y^{(k)*}_{ij}=y^*_j$，$i,j\epsilon M$，$k=1,2,\cdots,n_{ij}$，由此定义$Y^*_p$，且$Y^*=\begin{pmatrix}y^*_m\\y^*_p\end{pmatrix}$适合$G_s(Y^*)+B_s=0$，$s=1,2,\cdots,l$；$G_s(Y^*)+B_s\geqq 0$，$s=l+1,\cdots,m$。则$Y^*$是(2.1)唯一非负的稳定平衡状态。

证 由假设(H)知$R^l_{+0}\subset G^{(l)}(R^l_{+0})$，且$B^{(l)}<0$，这里$G^{(l)}=(G_1,\cdots,G_l)^T$，$B^{(l)}=(B_1,\cdots,B_l)^T$，由$Y^*$定义知$Y^*$是适合(2.3)的唯一非负平衡点。令$Y_l=(y_1,\cdots,y_l)$及

$$\mathrm{Y}_l=\{Y\,|\,Y\epsilon R^{m+p},\ Y_l>0,\ y_s=0,\ s=l+1,\cdots,m+p\}$$

$$R^{m+p}_l=\{Y\,|\,Y\epsilon R^{m+p},\ Y_l>0,\ y_s\geqq 0,\ s=l+1,\cdots,m+p\}$$

$$\mathrm{Y}^+_{Bl}=\{Y\,|\,G(Y)+B\geqq 0,\ Y\epsilon R^{m+p}_l\}$$

对$Y^0\epsilon R^{m+p}_l$，如定理2类似讨论，存在向量u、v使得$u\epsilon\mathrm{Y}^+_{Bl}$，$v\epsilon\mathrm{Y}_l$，$v<Y^0<u$，(2.1)从$Y^0$、$u$、$v$出发的解

$$Y^{v}(t)\leqq Y^{0}(t)\leqq Y^{u}(t),\quad 对 t\geqq 0 \tag{3.5}$$

从定理 2 已知Y^*关于Y^+_{Bl}全局稳定，即$\lim\limits_{t\to+\infty} Y^u(t)=Y^*$。但系统(2.1)从零分量出发的解相应的分量恒为零，故可将定理2应用于去掉零分量后的系统(2.1)，得到$\lim\limits_{t\to\infty}Y^v(t)=Y^*$，再由(3.5)得出对一切的$Y^0\epsilon R^{m+p}_l$有$\lim\limits_{t\to\infty}Y^0(t)=Y^*$，因此$Y^*$是(2.1)唯一非负的稳定平衡状态。定理得证。

§4. 应用讨论

作为例子，考虑食物链

$$\dot{x}_i=x_i\{b_i+a_i(x_i)x_i+c_{i,i-1}\int_{-\infty}^{t}\alpha_{i,i-1}\exp[-\alpha_{i,i-1}(t-\tau)]x_{i-1}(\tau)\,d\tau\} \tag{4.1}$$

其中$a_i(x_i)$是严格递减连续可微函数，$a_i(x_i)<-\mu<0$，$(i=1,2,\cdots,m)$，而$c_{i,i-1}>0$，对$i=2,\cdots,m$；$c_{1,0}=0$，$\alpha_{i,i-1}>0$。按§2变换为等价的系统

$$\begin{cases}\dot{y}_i=y_i[b_i+a_i(y_i)y_i+c_{i,i-1}y_{m+i-1}],\ i\epsilon M\\ \dot{y}_{m+i}=\alpha_{i+1,i}\,y_i-\alpha_{i+1,i}\,y_{m+i},\quad i=1,2,\cdots,m-1.\end{cases} \tag{4.2}$$

容易验证，$G(Y)$是M函数，且满足基本假设(H)，因而由定理 3 及定理 4 得知，此系统存在唯一非负的稳定平衡状态。

在上述例子里，x_1是食饵，而$x_i(i=2,\cdots,m-1)$既是捕食者又是被食者，x_m是营养层次最高的捕食者。每个捕食者取食于直接被食者，而且与直接被食者过去的种群密度有关，物种本身则存在着非线性的种内竞争。由我们的定理可知，这类食物链存在着稳定的平衡状态。

参 考 文 献

[1] Wörz-Busckros, A., *SIAM. J. Appl. Math.*, 35 (1978), 123-124.
[2] Solimano, F., Beretta, E., *J. Math. Biology*, 18 (1983), 2, 93-103.
[3] MacDonald, N., *Math. Biosci.*, 28 (1976), 321-330.
[4] Bownds, J.M., Cushing, J.M., *Math. Biosci.*, 26 (1975), 41-54.
[5] May, R.M., *Ecology*, 54 (1973), 315-325.
[6] Caswell, H., *J. Theoret. Biol.*, 34 (1972), 419-439.
[7] Wangersky, P.J., Cunningham, W.J., *Quant. Biol.*, 22 (1957), 329-338.
[8] Volterra, V., Lecon Sur La thêorie Mathêmatics dela Lutte pour Lavie, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
[9] Lakshmi kantham, V., Leela, S., *Differential and Integral Inequalities*, V.1, Academic press, New york. (1969).
[10] Tamir, A., *Math Program* 7 (1974), 17-31.