

用薄板样条构造高维求积公式

关 履 泰

(计 算 机 科 学 系)

摘 要

本文利用薄板样条函数的性质与它和Sard意义下最佳求积公式的关系,提出一种对散乱计值点任意求积区域适用的高维求积公式的构造方法,此法特别在维数是奇数时十分容易实现.

关键词 薄板样条, 近似泛函, 散乱计值点, m 精度

设 E_1 、 E_2 是两个 Banach 空间, t 是由 E_1 到 E_2 的线性连续算子, l 、 k_1 、 k_2 、 \dots 、 k_n 都是 E_1 上的线性连续泛函, 令 $u(x) = k(x) - l(x)$, $k = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i$, $u(x) = v(t(x))$, 如果存在系数 λ_i 使

$$(i) \quad u(x) = 0, \text{ 对一切 } x \in N(t) \text{ 成立} \quad (1)$$

$$(ii) \quad \|v\| \text{ 达极小} \quad (2)$$

那末就把 k 称为 l 的Sard意义下最佳的近似泛函. 当 E_1 、 E_2 是 Hilbert 空间的时候, 可以用希氏空间的样条函数去求最佳近似泛函.

设 E_1 、 E_2 、 E_3 是 Hilbert 空间, t 与 a 分别是 E_1 到 E_2 与 E_1 到 E_3 的线性连续算子, 给定 $z \in E_3$, 记 $I_z = \{x \in E_1 \mid a(x) = z\}$, 如果存在 $\sigma \in E_3$ 使

$$\|t(\sigma)\|_{E_2} = \min_{x \in I_z} \|t(x)\|_{E_2}$$

那末就把 σ 称为 (关于 t 、 a 与 z) 的插值样条函数. 记 $\sigma = \gamma(z)$, γ 称为插值样条算子.

引理 1 存在一个 l 的Sard意义下最佳的近似泛函 $k = a'(\gamma'(l))$, 这里 a' , γ' 分别是 a , γ 的共轭算子, l 满足 $l(x) = (l, x)$ 对一切 $x \in E_1$ 成立.

本文1987年5月收到

● 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

类似引理 1 的定理及其证明可见文[1], 这时 k 亦称为对插值样条函数准确的近似泛函。

设 Ω 是 n 维欧氏空间 R^n 中的一个有界区域, $P_i, i=1, \dots, N$ 是 Ω 中的散乱点, $z_i, i=1, \dots, N$ 是给定实数, 如果存在函数 $\sigma(P) \in W_2^m(\Omega)$, 满足:

$$\sigma(P_i) = z_i, \quad i=1, \dots, N \quad (3)$$

且

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\Omega} (D^\alpha \sigma)^2(P) d\Omega = \min \quad (4)$$

那末 $\sigma(P)$ 称为 (广义) 薄板 (插值) 样条函数。

引理 2 (广义) 薄板 (插值) 样条函数

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^N \lambda_i G_{m,n}(P - P_i) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} v_\alpha P^\alpha \quad (5)$$

这里

$$G_{m,n}(x, P) = G_{m,n}(x - P) = \begin{cases} \|x - P\|^{2m-n} \ln \|x - P\|, & n \text{ 为偶数} \\ \|x - P\|^{2m-n}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\|x - P\| = \left[\sum_{i=1}^n (x^{(i)} - P^{(i)})^2 \right]^{1/2}$$

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \quad P = (P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)})$$

$$P^\alpha = ((P^{(1)})^{\alpha_1} \cdot (P^{(2)})^{\alpha_2} \dots (P^{(n)})^{\alpha_n})$$

系数 $\lambda = [\lambda_i]$ 与 $v = [v_\alpha]$ 由下列方程组解出

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 $z = [z_i]$, B^* 是 B 的转置矩阵, 矩阵 $[A \ B]$ 由条件 $\sigma(P_i) = z_i$ 得出。

利用上面两个引理可得:

定理 设 Ω 是 n 维欧氏空间 R^n 中的一个有界域, $p_i (i=1, \dots, N)$ 是 Ω 内的任意散乱点, 如果下面对应薄板样条解存在唯一, 那末可以构造出有 m -精度的 Ω 上的多元求积公式:

$$\int_{\Omega} f(p) dp = \sum_{i=1}^N A_i f(p_i)$$

系数 $A_i = \int_{\Omega} A_i(p) dp$

$A_i(p)$ 为对应薄板样条中 $f(p_i)$ 项的参变量系数, 即由 $\sigma(p) \in W_2^m(\Omega)$ 满足 (3)、(4) 式

$$\text{求出 } \sigma(p) = \sum_{i=1}^N A_i(p) \cdot f(p_i)$$

这求积公式在Sard意义下是最佳的,求积公式误差与 $\left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\Omega} (D^{\alpha}f)^2(p) d\Omega \right)^{1/2}$

比值的上确界达极小.

证明 记 $X = W_2^m(\Omega)$, $Y = \prod_{i=1}^K L_2(\Omega)$, $Z = R^N$

$$t(f) = \nabla^m f = \left[\sqrt{\frac{m!}{\alpha!}} D^{\alpha} f, |\alpha| = m \right]$$

$$a(f) = [f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_N)]$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, K 是使 $|\alpha| = m$ 的向量 α 的个数.

这样, X, Y, Z 都是 Hilbert 空间, 线性算子 $t: X \rightarrow Y$, $a: X \rightarrow Z$, 上述(广义)薄板样条问题就是一个 Hilbert 空间的样条函数问题:

求 $\sigma \in W_2^m(\Omega) \cap I_f$ 使

$$\|t(\sigma)\|_Y^2 = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\Omega} (D^{\alpha}\sigma)^2(p) d\Omega = \min$$

$$I_f = \{u | u(p_i) = f(p_i), i = 1, N\} = \{u | a(u) = a(f)\}$$

$$\text{令 } l(f) = \int_{\Omega} f(p) dp$$

$$k(f) = \sum_{i=1}^N A_i k_i(f) = \sum_{i=1}^N A_i f(p_i)$$

根据引理1, 存在 l 的 Sard 意义下最佳的近似泛函 $k = a'(\gamma'(l))$

利用 Riesz 表现定理

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N A_i f(p_i) = k(f) &= \langle k, f \rangle = \langle a'(\gamma'(l)), f \rangle = \langle l, \gamma(a(f)) \rangle \\ &= l(\gamma(a(f))) \end{aligned} \quad (7)$$

如果记 $z = a(f) = [f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_N)]$

那末 $\sigma = \gamma(z) = \gamma(a(f))$ 就是(关于 t, a 与 z 的)插值样条函数, 满足

$$\|t(\sigma)\|_Y = \min_{x \in I_z} \|t(x)\|_Y$$

$$I_z = \{x \in X | a(x) = z\} = W_2^m(\Omega) \cap I_f$$

所以 σ 是满足相应条件的(广义)薄板样条, 根据引理2即式(5), 系数 λ 与 ν 由方程组(6)解出

$$z = [f(p_1), \dots, f(p_N)].$$

所以完全可以把求出的 $\sigma(p)$ 化成

$$\sigma(p) = \sum_{i=1}^N A_i(p) \cdot f(p_i)$$

注意 $l(f) = \int_{\Omega} f(p) dp$, 这样, 从 (7) 式得到

$$\sum_{i=1}^N A_i f(p_i) = l(\gamma(a(f))) = l(\sigma) = \int_{\Omega} \sigma(p) dp = \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} A_i(p) dp \right) \cdot f(p_i)$$

比较系数可知

$$A_i = \int_{\Omega} A_i(p) dp$$

这样得到定理所求的多元求积公式, 它是 Sard 意义下最佳的, 满足前述 (1)、(2) 式。

由算子 t 的定义可知

$$N(t) = \{x(s_1, \dots, s_n) \in W_2^m(\Omega) \mid x = \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_{\alpha} s^{\alpha}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

$$s^{\alpha} = s_1^{\alpha_1} \cdot s_2^{\alpha_2} \dots s_n^{\alpha_n}\}$$

也就是说, $N(t)$ 是次数不超过 $m-1$ 的多元多项式, 条件 (i) 说明我们的求积公式具有 m -精度, 即对次数不超过 $m-1$ 的多元多项式是精确的。

由于

$$\|v\| = \sup_{y \in Y} \frac{|v(y)|}{\|y\|_Y} = \sup_{x \in X} \frac{|v(t(x))|}{\|t(x)\|_Y}$$

而

$$|v(t(x))| = |u(x)| = |k(x) - l(x)|$$

$$\|t(x)\|_Y^2 = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\Omega} (D^{\alpha} x)^2(p) d\Omega$$

所以利用条件 (ii) 就可以证明定理最后的结论。

例 求以 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ 为计值点, 有 1-精度的矩形域上求积公式, 矩形域 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$

解: 先求出在 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ 上取值为 $f(1, 1)$, $f(1, 2)$, $f(2, 1)$ 的薄板样条:

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] + \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 y$$

这里 $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_1 = y_3 = 1$, $y_2 = 2$,

$$\text{求出 } a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0$$

$$a_{23} = a_{32} = \ln 2$$

确定系数 λ_i, μ_i ($i=1, 2, 3$) 的方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ln 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \ln 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1, 1) \\ f(1, 2) \\ f(2, 1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\mu_1 = 3f(1, 1) - f(1, 2) - f(2, 1)$$

$$\mu_2 = f(2, 1) - f(1, 1), \quad \mu_3 = f(1, 2) - f(1, 1)$$

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= 3f(1, 1) - f(1, 2) - f(2, 1) + f(2, 1)x - f(1, 1)x + f(1, 2)y - f(1, 1)y \\ &= (3 - x - y)f(1, 1) + (y - 1)f(1, 2) + (x - 1)f(2, 1) \end{aligned}$$

$$A_1 = \iint_{\Omega} (3 - x - y) dx dy = 0$$

$$A_2 = \iint_{\Omega} (y - 1) dx dy = \frac{9}{2}$$

$$A_3 = \iint_{\Omega} (x - 1) dx dy = \frac{9}{2}$$

得求积公式:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \frac{9}{2} f(1, 2) + \frac{9}{2} f(2, 1)$$

这求积公式的代数精度是1, 容易验证, 如果 $f(x, y) = ax + by + c$, 那么 $f(1, 2) = a + 2b + c$, $f(2, 1) = 2a + b + c$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = 9c + \frac{27}{2}a + \frac{27}{2}b = \frac{9}{2} f(1, 2) + \frac{9}{2} f(2, 1).$$

参 考 文 献

- [1] P. J. Laurent, *Approximation et Optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
 [2] В.А. ВАСИЛЕНКО, СПЛАЙН-ФУНКЦИИ, ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ, ПРОГРАММЫ, ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», Новосибирск, 1983.
 [3] 徐利治、周蕴时, 高维数值积分, 科学出版社, 1980.

A Method for Constructing Numerical Integration Formulas in Higher Dimensions with Thin Plate Splines

Guan Lutai

Abstract

We give a method for constructing numerical integration formulas in higher dimensions to scattered points with thin plate splines.

Keywords Thin plate splines, Approximate functional, Scattered points, m-th degree formulas