

关于解析函数单叶性的判则

侯 纪 欣

(数学系)

摘 要

对于在区域 G 内具有某些性质的解析函数 $f:G \rightarrow \mathbf{C}$, 本文定理 1 指出 (G, f) 是 $f(G)$ 的有穷叶光滑非限覆盖曲面. 作为应用, 在定理3中讨论了 $B(0;1)$ 内满足条件 $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ 的解析函数的单叶性与其Taylor展式的系数及其边界值的关系.

关键词 光滑非限覆盖曲面, 单叶解析函数

解析函数的单叶性条件曾经被许多作者认真讨论过. 1967年A. Пeбeлeв得到了一个积分形式的充分必要条件^[1]; 1981年E. Пoпa讨论了 C^1 类函数并得到了一些微分形式的充分条件^[2]. 本文拟从几何的角度对解析函数的单叶性问题作若干探讨, 并得到某些函数单叶的充分必要条件.

定理 1 设非空集 G 是平面 \mathbf{C} 内一个区域, ∂G 是 G 落在闭平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上的边界. 若解析函数 $f:G \rightarrow \mathbf{C}$ 满足以下条件:

(i) 对任一 $\zeta \in \partial G$, $\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ (z \in G)}} f(z) = \eta \in \overline{\mathbf{C}}$ 存在

(ii) $f(G) \cap f(\partial G) = \phi$, 其中
 $f(\partial G) = \{ \eta : \eta = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ (z \in G)}} f(z), \zeta \in \partial G \},$

(iii) $\{ z : f'(z) = 0, z \in G \} = \phi,$

则下列结论成立:

- ① (G, f) 是 $f(G)$ 的有穷叶光滑非限覆盖曲面,
- ② 若 G 为单连通区域, 则 $f(G)$ 也是单连通区域.

证明 1. 先证明第一个结论.

本文1985年11月收到

设 $\{U_\alpha\}$ 和 $\{V_\beta\}$ 分别是区域 G 与区域 $f(G)$ 内全体开集构成的开集族, $Z_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbf{C}$ 和 $W_\beta: V_\beta \rightarrow \mathbf{C}$ 是恒等映照, 则显然 G 和 $f(G)$ 分别是以 $\{(U_\alpha, Z_\alpha)\}$ 和 $\{(V_\beta, W_\beta)\}$ 为复结构的黎曼曲面. 我们将证明 (G, f) 是曲面 $f(G)$ 的有穷叶光滑非限覆盖曲面.

对任一 $w \in f(G)$, 由条件(ii), $f^{-1}(w) \cap \partial G = \phi$. 记

$$A_w = \{z \in G: f(z) = w\}$$

易知 A_w 为有穷集. 事实上, 根据假设(iii), f 是非常数解析函数, 因此 A_w 在 G 内不可能有极限点. 其次, 由假设(ii), $w \in f(G) - f(\partial G)$, 故 A_w 在 ∂G 上也不能有极限点. 故 A_w 必为有穷集.

记 $A_w = \{z_j: j \in J\}$, 根据条件(iii), 对任一 $z_j \in A_w$, 必有以 w 为心的圆盘 $B(w; r_j)$ 使 f 作出 z_j 的某个邻域到 $B(w; r_j)$ 的一一解析映照. 因 A_w 为有穷集, 故存在 $r_0, 0 < r_0 < \min\{r_j: j \in J\}$, 使

$$f^{-1}(B(w; r_0)) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

其中 $U_j \subset G$ 是 z_j 的邻域, $f: U_j \rightarrow B(w; r_0)$ 是一一解析映照. $\{U_j: j \in J\}$ 两两不相交, 这说明 $f: G \rightarrow f(G)$ 是覆盖映照. 从而 (G, f) 是 $f(G)$ 的光滑非限覆盖曲面^[4]. 因此, $f(G)$ 内每一点被覆盖同样多次. 上面已证明 A_w 为有穷集, 故存在正整数 n 使 (G, f) 是 $f(G)$ 的 n 叶覆盖曲面.

2. 现在证明, 若 G 为单连通区域, 则 $f(G)$ 也是单连通区域.

首先, 如补充定义 $f(\zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ (z \in G)}} f(z)$, ($\zeta \in \partial G$), 则易知 f 在 $\overline{G} = G \cup \partial G$ 上连续. 事实

上, 若存在 $\zeta \in \partial G$, 使在 ζ 不连续, 则必有 \overline{G} 上的无穷点列 $\{z_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f(z_n)$ 或者不趋于有穷或无穷极限, 或虽有极限但不等于 $f(\zeta)$, 对 $\{z_n\}$ 中任一点 z_n , 若 $z_n \in G$, 则令 $z'_n = z_n$, 若 $z_n \in \partial G$, 则由条件(i), 可取 $z'_n \in G$ 满足 $|z'_n - z_n| < \frac{1}{n}$,

$|f(z'_n) - f(z_n)| < \frac{1}{n}$, 于是无穷点列 $\{z'_n\}$ 满足 $\{z'_n\} \subset G$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \zeta$, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$f(z'_n)$ 不趋于 $f(\zeta)$, 这与假设(i)矛盾. 所以, f 必在 \overline{G} 上连续, 特别, f 在 ∂G 上连续, 因 f 是开映照, 故 $\partial f(G) \subset f(\partial G)$, 又由条件(ii), $f(\partial G) \subset \partial f(G)$, 故

$$f(\partial G) = \partial f(G). \quad (1)$$

现在, 若 G 为单连通区域而 $f(G)$ 不是单连通的, 则在 $f(G)$ 内必存在一条非零伦的简单闭曲线 γ . 若 $\overline{\mathbf{C}}$ 上以 γ 的迹 $|\gamma|$ 为边界的有界区域和无界区域分别为 D 和 D_1 , 则因 $D \cap (\mathbf{C} - f(G)) \neq \phi$, $D \cap f(G) \neq \phi$, 且 D 为连通集, 我们有

$$D \cap \partial f(G) \neq \phi \quad (2)$$

此外, 显然有

$$D_1 \cap \partial f(G) \neq \phi. \quad (3)$$

另一方面, 因 G 为单连通区域, 故 ∂G 为连通集, 而 $f: \partial G \rightarrow f(\partial G)$ 是连续映照, 因而 $f(\partial G)$ 也是连通集. 若 $|\gamma| \cap \partial f(G) = \phi$, 则 $\partial f(G) = (D \cap \partial f(G)) \cup (D_1 \cap \partial f(G))$, 而由

(2)、(3)和(4), 上式右端是两个非空不相交闭集之并。这与 $\partial f(G) (= f(\partial G))$ 的连通性矛盾。故必有

$$|\gamma| \cap \partial f(G) \neq \phi, \quad (4)$$

但由假设, $|\gamma| \subset f(G)$, 而由(1)、(4)得

$$f(G) \cap f(\partial G) \neq \phi,$$

与假设(ii)矛盾, 这就证明了, 若 G 为单连通区域, $f(G)$ 也必是单连通的。定理1证毕。
由证明过程可知, 定理1的结论②在条件(i)、(ii)下成立。

定理2 设 $G \subset \mathbf{C}$ 是单连通区域, ∂G 是 G 落在 $\overline{\mathbf{C}}$ 上的边界, $f: G \rightarrow \mathbf{C}$ 为解析函数, 对任一点 $\zeta \in \partial G$, $\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ (z \in G)}} f(z) = \eta \in \overline{\mathbf{C}}$ 存在。记

$$f(\partial G) = \{\eta: \eta = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ (z \in G)}} f(z), \zeta \in \partial G\},$$

则当且仅当

$$f(G) \cap f(\partial G) = \phi \quad (5)$$

及

$$\{z: f'(z) = 0, z \in G\} = \phi \quad (6)$$

成立时, $f: G \rightarrow f(G)$ 是单叶解析函数。

证明 若(5)、(6)成立, 根据定理1的结论①, (G, f) 是 $f(G)$ 的光滑非限覆盖曲面, 而定理1的结论②指出, $f(G)$ 是单连通曲面。因此, 投影映照 $f: G \rightarrow f(G)$ 是拓扑映照, 从而, f 是单叶解析函数。

反之, 若 f 单叶, 则显然(6)成立。如有 $b \in f(G) \cap f(\partial G)$, 则必有 $z_0 \in G$ 及 $\zeta \in \partial G$ 使 $f(z_0) = b$, $\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ (z \in G)}} f(z) = b$, f 把 z_0 某邻域 G_0 一一解析地映为 b 的某个邻域 D_0 。取 $\delta > 0$ 充分小使 $B(z_0, \delta)$

$\subset G_0$, $B(z_0, \delta) \cap B(\zeta, \delta) = \phi$ 且有 $z_1 \in B(\zeta, \delta) \cap G$ 使 $f(z_1) = w_1 \in f(B(z_0, \delta))$ 。另一方面, 因 $f: B(z_0, \delta) \rightarrow f(B(z_0, \delta))$ 是双射的, 故必有 $z_2 \in B(z_0, \delta)$ 使 $f(z_2) = w_1$, 于是有

$$z_1 \neq z_2, f(z_1) = f(z_2) = w_1,$$

这与 f 的单叶性矛盾。这说明若 f 单叶, 必须(5)、(6)同时成立。定理2证毕。

作为定理2的一个应用, 我们讨论单位圆盘内解析函数单叶性的条件。

定理3 设 $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$ 在单位圆盘 $G = B(0; 1)$ 内解析。若对任一点 $\zeta \in \partial G$,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ (z \in G)}} f(z) = \eta \quad (0 < |\eta| \leq +\infty)$$

存在。记

$$f(\partial G) = \{\eta: \eta = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ (z \in G)}} f(z), \zeta \in \partial G\},$$

则 f 为单叶解析函数的充分必要条件为: 对任一 $\eta \in f(\partial G) \cap \mathbf{C}$, 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{K} [(-1)^k (f' - 1)_n^k + \frac{1}{\eta^k} (f)_n^k] \right|^{\frac{1}{n}} \leq 1. \quad (7)$$

其中 $(h)_n^k$ 代表函数 h^k 在 $z=0$ 的泰勒展开式中 z^n 的系数.

证明 根据定理 2, 当且仅当对任一 $z \in G$ 及任一 $\eta \in f(\partial G) \cap \mathbf{C}$,

$$f'(z)(f(z) - \eta) \neq 0 \quad (8)$$

成立时, f 在 G 内单叶, 又因 G 为单连通区域, 由 (8), 必存在函数 $h(z, \eta)$ 满足

$$f'(z)[f(z) - \eta] = \exp[h(z, \eta)], \quad (9)$$

其中, 对固定的 η , h 是 G 内关于 z 的解析函数, 因此, 若适当选择 \log 的一个单值分支, 则

$$h(z, \eta) = \log \left[-\eta f'(z) \left(1 - \frac{f(z)}{\eta} \right) \right] \quad (10)$$

当 $|z|$ 充分小时, (10) 在 $z=0$ 有展开式

$$\begin{aligned} h(z, \eta) &= \log(-\eta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} [f'(z) - 1]^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K} \left[\frac{f(z)}{\eta} \right]^k \\ &= \log(-\eta) - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{K} \left[(-1)^k (f' - 1)_n^k + \frac{1}{\eta^k} (f)_n^k \right] \right\} z^n. \quad (11) \end{aligned}$$

因 $h(z, \eta)$ 关于 z 在 G 内解析, 故 (11) 对 G 内所有 z 成立. 从而 (11) 右端的收敛半径 ≥ 1 . 即 (7) 成立.

反之, 若 (7) 对所有 $\eta \in f(\partial G) \cap \mathbf{C}$ 成立, 则对任一确定的 η 及 \log 的一个单值分支, (11) 右端在 $|z| < 1$ 内收敛于一个解析函数 $h(z, \eta)$. 因 $|\eta| > 0$, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ 而 $-\eta f'(z) \left(1 - \frac{f(z)}{\eta} \right)$ 在原点一个邻域内不为零, 由上面的推导可知, 存在充分小的 $\delta > 0$ 使

$$\begin{aligned} \log \left[-\eta f'(z) \left(1 - \frac{f(z)}{\eta} \right) \right] &= \log(-\eta) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{K} \left[(-1)^k (f' - 1)_n^k + \frac{1}{\eta^k} (f)_n^k \right] \right\} z^n, \quad (|z| < \delta). \end{aligned}$$

即在 $|z| < \delta$ 内有

$$\log \left[-\eta f'(z) \left(1 - \frac{f(z)}{\eta} \right) \right] = h(z, \eta)$$

从而有

$$f'(z)[f(z) - \eta] = \exp[h(z, \eta)].$$

由解析函数的唯一性知上式在 $|z| < 1$ 成立. 从而 (8) 对 $\eta \in f(\partial G) \cap \mathbf{C}$ 成立. 故 f 在 G 内单叶.

参 考 文 献

- [1] Н. А. Девелев, Принципы Площадей Теории Однолистных Функций, СССР, 1975.
- [2] E. M. Pora, Some Sufficient Conditions of Univalence for Complex Functions of the Class C^1 , *Lecture Notes in Mathematics*, 1013, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983, 350-355.
- [3] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable, IX.
- [4] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Translated by B. Gilligan. 4-7.

A Criterion for Univalence of Analytic Functions

Hou Jixin

Abstract

Suppose that $f:G \rightarrow \mathbb{C}$ is an analytic function with some properties in a region G . Theorem 1 shows that (G, f) is a smooth unlimited covering manifold of $f(G)$. Theorem 2 gives the sufficient and necessary conditions under which f is univalent in a simply connected region. In theorem 3, an application of theorem 2 is given to a function f which is analytic in the unit disk $B(0;1)$ and is restricted by the condition $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. The relations between the univalence of f and the coefficients of its Taylor expansion as well as its boundary values are discussed.

Keywords smooth unlimited covering manifold, univalent analytic function.