

关于 Kingman 不等式*

戴永隆

(数学系)

摘 要

本文目的是改进P-函数的Kingman不等式, 将所得的结果应用于P-函数振荡问题, 简单地证明已被邹捷中证明了的Kendall弱猜想

关键词 标准P-函数, Kingman, 不等式

以 \mathcal{P} 记全体标准p-函数, 对任意 $p \in \mathcal{P}$, $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, p 适合如下的Kingman不等式:

$$f(t_n) \geq 0, \quad g(t_n) \geq 0 \quad (1)$$

其中对每个 $1 \leq s \leq n$, $f(t_s) = f(t_1, \dots, t_s)$ 和 $g(t_1, \dots, t_s)$ 由下式递归确定

$$f(t_s) = p(t_s) - \sum_{r=1}^{s-1} f(t_r) p(t_s - t_r)$$

$$g(t_s) = 1 - \sum_{r=1}^s f(t_r)$$

余耀祺将不等式(1)改进为^[1]

$$g(s_{k+1}) \geq \exp\{-1 + N_e[\sum_{r=1}^k f(s_r)]\} - \sum_{r=1}^k f(s_r) \quad (2)$$

其中 $\{N_l, l=1, 2, \dots\}$ 见[2]或下面的(5)式, 本文目的是进一步改进这一不等式, 从而获得一些重要的推论.

§1. 一个纯分析问题

令

$$A_0(x) = \exp(-1+x), \quad x \in [0, 1] \quad (3)$$

本文1987年6月收到

• 中山大学高等学术中心基金资助项目. 摘要发表在第一次中美统计会议 (1987. 9)

对 $l \geq 1$, $A_l(x)$ 由下式递归定义:

$$\int_{A_l(x)}^1 \frac{A_{l-1}(t)}{t} dt = 1 - x, \quad x \in [0, 1] \quad (4)$$

又令 $N_0(x) = x$, $N_1(x) = A_1(x)$, 以及当 $l \geq 1$ 时令

$$N_l(x) = N_{l-1}(A_l(x)) = A_1 A_2 \cdots A_l(x) \quad (5)$$

上述 $A_l(x)$ 及 $N_l(x)$ 首先由 [2] 引进.

引理 1 对任意 $l \geq 0$, $x, x_0 \in [0, 1]$ 有

$$|A_l(x) - A_l(x_0)| \leq |x - x_0| \quad (6)$$

$$|N_l(x) - N_l(x_0)| \leq |x - x_0| \quad (7)$$

证明 由于

$$\int_{A_l(x)}^1 \frac{A_{l-1}(t)}{t} dt = 1 - x, \quad \int_{A_l(x_0)}^1 \frac{A_{l-1}(t)}{t} dt = 1 - x_0 \quad (8)$$

则将 (8) 中两式相减并注意 $A_{l-1}(t) \geq t$, 故

$$|x - x_0| = \left| \int_{A_l(x_0)}^{A_l(x)} \frac{A_{l-1}(t)}{t} dt \right| \geq |A_l(x) - A_l(x_0)|$$

得 (6), (7) 由下式获得

$$|N_l(x) - N_l(x_0)| = |A_1 A_2 \cdots A_l(x) - A_1 A_2 \cdots A_l(x_0)| \leq |x - x_0|.$$

又因 (见 [2]):

$$A_l(x) \geq A_{l+1}(x), \quad N_l(x) \leq N_{l+1}(x), \quad l \geq 0 \quad (9)$$

知 $A(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} A_l(x)$ 与 $N(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} N_l(x)$ 存在, 由引理 1, $\{N_l(x), l \geq 1\}$, $\{A_l(x), l \geq 1\}$

在 $[0, 1]$ 一致连续, 所以极限 $N(x)$, $A(x)$ 连续.

引理 2 $A(x) = x, x \in [0, 1]$ (10)

证明 显然 $1 \geq A_l(x) \geq A(x) \geq x$, 设 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{l \rightarrow \infty} A_l(0) = 0$, 故可取充分大的 l 使

$A_{l+1}(0) < \varepsilon$, 则

$$1 \geq \int_{\varepsilon}^1 \frac{A_l(t)}{t} dt \geq \int_{\varepsilon}^1 \frac{A(t)}{t} dt \geq 1 - \varepsilon$$

故得

$$\int_0^1 \frac{A(t)}{t} dt = 1$$

因为 $A(t) \geq t$, 故 $A(t) = t$.

引理 3 $N(x) = 1 + \ln \frac{1+x^2}{2}$ (11)

证明 由 [2], 有

$$\exp(-1 + N_l(x)) N_l'(x) = A_l(x), \quad l \geq 1 \quad (12)$$

由于 $N_l'(x)$ 是连续函数, 从而由 (12):

$$\lim_{l \rightarrow \infty} N'_l(x) = \frac{A(x)}{\exp(-1 + N(x))} \quad (13)$$

再由(12),

$$N_l(x) - N_l(0) = \int_0^x \frac{A_l(t)}{\exp(-1 + N_l(t))} dt \quad (14)$$

由于 A_l, N_l 的一致连续性, 由(14)有

$$N(x) - N(0) = \int_0^x \frac{A(t)}{\exp(-1 + N(t))} dt \quad (15)$$

故得 (由引理 1, $A(x) = x$):

$$\begin{aligned} N'(x) &= A(x)/\exp(-1 + N(x)) \\ &= x/\exp(-1 + N(x)) \end{aligned} \quad (16)$$

解微分方程(16), 并注意边界条件

$$N(1) = \lim_{l \rightarrow \infty} N_l(1) = 1$$

得 $e^{N(0)} = \frac{e}{2}$, 故得(11).

§2. Kingman不等式的另一形式

式(2)可以改进为:

定理 1 对 $p \in \mathcal{P}$, $0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{r+1}$, $r \geq 1$ 有

$$g(s_{r+1}) \geq \frac{1}{2} (1 + (\sum_{i=1}^r f(s_i))^2) - \sum_{i=1}^r f(s_i) \quad (17)$$

证明 在(2)中令 $l \rightarrow \infty$, 取极限, 由引理 3 立得(17).

我们指出, Kingman不等式(1)等价于(1)中的第(1)个不等式和(17)式. 因为(17)式显然推出(1)中的第二个不等式.

在(17)中取 $r=1$, $s_2=1$, $s_1=t$ 得

$$1 - p(1) \geq -\frac{1}{2} (1 + (p(t))^2) p(t) p(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (18)$$

类似于[2]中的讨论, 而得

$$1 - p(1) \geq \frac{1}{2} (1 + (p(t))^2) - (p(t))^2 \quad 0 \leq t \leq 1$$

即

$$1 - p(1) \geq \frac{1}{2} (1 - p^2(t)) \quad 0 \leq t \leq 1$$

记 $p(1) = M$, 则

$$M \leq \frac{1}{2} (1 + p^2(t)). \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (19)$$

下设 $p \in \mathcal{P}$, $M = p(1)$, 令

$$m(M, P) = \inf \{p(t); 0 \leq t \leq 1\} \quad (20)$$

$$I(M) = \inf \{m(M, P); p \in \mathcal{P}, p(1) = M\} \quad (21)$$

则立得

定理 2 当 $M \geq \frac{1}{2}$ 时, 有

$$I(M) \geq \sqrt{2M-1} \quad (22)$$

证明 由(19)

$$M \leq \frac{1}{2} (1 + p^2(t)), \quad 0 \leq t \leq 1$$

故由定义(21)即得(22)。

再令

$$v_0 = \inf \{M: I(M) > 0\}$$

则由定理 2 立得*

推论 $v_0 \leq \frac{1}{2}$.

参 考 文 献

- [1] 余耀祺, 关于标准P-函数n阶Kingman不等式的改进, 中山大学学报(自然科学版), 论丛[3]1984, 51—54.
 [2] 余耀祺, 数学年刊, 5A(1984) 473—482.

On Kingman's Inequalities

Dai Yonglong

Abstract

Let \mathcal{P} denote the class of all standard p-functions, for any $p \in \mathcal{P}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, p satisfies the following Kingman's inequalities:

$$f(t_n) \geq 0; \quad g(t_n) \geq 0,$$

where for each s, $1 \leq s \leq n$, $f(t_s) = f(t_1, \dots, t_s)$ and $g(t_s) = g(t_1, \dots, t_s)$ are defined recursively by

$$f(t_s) = p(t_s) - \sum_{r=1}^{s-1} f(t_r) p(t_s - t_r);$$

$$g(t_s) = 1 - \sum_{r=1}^s f(t_r).$$

Note. The values of $f(t_s)$ & $g(t_s)$ depend not on alone t_s but also on t_1, t_2, \dots, t_{s-1} .

Theorem 1. Let $p \in \mathcal{P}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1}$, $n \geq 1$. we have

$$g(t_{n+1}) \geq \frac{1}{2} (1 + (\sum_{r=1}^n f(t_r))^2) - \sum_{r=1}^n f(t_r).$$

For $p \in \mathcal{P}$, $M = p(1)$, Let

$$m(M, p) = \inf \{ p(t): 0 \leq t \leq 1 \};$$

$$I(M) = \inf \{ m(M, p): p \in \mathcal{P} \};$$

$$v_0 = \inf \{ M: I(M) > 0 \}.$$

Theorem 2. If $M > \frac{1}{2}$, then $I(M) \geq \sqrt{2M-1}$.

Keywords Standard p-functions, Kingman, inequalities

• 邹捷中, P-函数振荡问题, 博士论文, 长沙铁道学院(1986)。