·研究简报·

一类多点定轨问题中小干扰项的估计

黎罗罗
（计算机科学系）

摘　要

结合一次样条用参考方程法估计多点定轨问题中小干扰输入项，给出误差界限的估计原则，并作了数值试验。

关键词　反问题，参考方程法，样条

由对模型（方程）的输出的观测去估计输入的干扰项，是一类反问题。本文讨论多点定轨问题[1]中这类反问题的参考方程法。该法可用于对模型方程系数的估计1) 及初值问题的小干扰项的估计[2]。关于该方法与传统的统计方法的比较可见文〔2〕。文内以一次样条为例，说明用样条函数拟合小干扰项，建立定轨问题中小干扰项的估计方法。

1　方法叙述

以单个二阶方程的模型为例。

设运动轨迹$y=y(t)$满足方程

$$\ddot{y}(t)=f(t,y)+p(t), \qquad t\in[a,b] \tag{1}$$

其中f是已知函数，$p(t)$是小干扰项。问题是由观测

$$\begin{aligned} &y_i\equiv y(t_i)=\beta_i \\ &t_i=a+ih, \qquad (i=0,1,2,\cdots,N+1) \\ &h=(b-a)/(N+1) \end{aligned} \tag{2}$$

估计$p(t)$。

考虑区间$[t_{i-1},t_i]$，引入参考边值问题

$$\begin{aligned} &\ddot{y}^r(t)=f(t,y^r), \\ &y^r(t_{i-1})=\beta_{i-1}, \quad y^r(t_{i+1})=\beta_{i+1} \end{aligned} \tag{3}$$

命题1　若$f(t,y)$关于y一阶连续可微，则

$$y_i-y_i^r+\varepsilon_i h^2=\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}}k(t_i,u)p(u)du \tag{4}$$

其中

$$k(t,u)=(t-u)_+-(t-t_{i-1})(t_{i+1}-u)/(2h) \tag{5}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta(\xi))(y^r(\xi)-y(\xi)) \qquad \xi\in(t_{i-1},t_{i+1}) \tag{6}$$

$\eta(\xi)$介于$y^r(\xi)$与$y(\xi)$之间。

本文1987年11月收到

1) 黎罗罗，“线性常微分方程的反问题”，中山大学研究生毕业论文，1981.

证明 用格林函数和中值定理可得。

下一步用样条函数拟合$p(u)$。为简单计，以一次样条拟合为例。

命题2 若对(4)中$p(u)$作分片一次插值，则有

$$r_i - \varepsilon_i = \frac{1}{12}(p_{i-1} + 4p_0 + p_{i+1}) \tag{7}$$

其中 $r_i = (y_i^r - y_i)/h^2$, $p_i = p(t_i)$

证明 将一次样条基函数代入(4)计算。

略去ε_i，且假设运动起始与结束时干扰消失，即$p_0 = p_{N+1} = 0$，则由(7)有方程组

$$Ap = r \tag{8}$$

其中

$$A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$p = (p_1, p_2, \cdots, p_N)^T, \quad r = (r_1, r_2, \cdots, r_N)^T$$

解(8)即得$p(t_i)$，从而获得$p(t)$的估计$\bar{p}(t)$。

关于$p(t)$的不同的边界条件，可列出别的方程组，在此，不一一列举。

2 误差界限的估计原则

取$\|\cdot\|_\infty$模。p的相对误差为

$$\|\delta p\|/\|p\| \leqslant \text{cond}(A)\ (\|\delta r\|/\|r\|)$$

绝对误差为

$$\|\delta p\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\delta r\|$$

根据(9)的元素作出的估计是

$\text{cond}\ (A) \leqslant 3$ （圆盘定理）

$\|A^{-1}\| \leqslant 6$ （见文〔4〕中式(14)）

本方法自身引起的误差$\|\delta r\|$为$\|\delta_r\| \leqslant \|\delta r_{\text{I}}\| + \|\delta r_{\text{II}}\|$，其中

① δr_{I}来自从(7)略去ε_i，于是$\|\delta r_{\text{I}}\| = O(h)$。

② δr_{II}来自对(4)的梯形公式近似求积，故$\|\delta r_{\text{II}}\| = O(h^4)$。

另若β_i的来源带有误差，则依其性质列入δr。

3 数值试验

取文〔2〕中受扰简谐振荡为例。运动由

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0.01\sin(0.5t),$$

$$y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1$$

确定。〔2〕在拥有$y(t_i)$、$\dot{y}(t_i)$资料的条件下估计干扰项（即$0.01\sin(0.5t) = p(t)$）。用本文的方法在仅有$y(t_i)$资料条件下，估计$p(t)$，部分数值结果见表1，其中

$\bar{p}(t)$为估计值，$w(t) = \bar{p}(t) - p(t)$， $[a,b] = [0, 12.5]$。

就本例而言，步长缩短的主要改进表现在$[a,b]$的端点附近。

表 1

t	| w(t) |	
	h = 0.25	h = 0.05
0.9615384	4.0065404E-03	1.3142250E-04
1.9230796	1.3357478E-03	2.5557696E-04
2.8846153	1.3231913E-04	3.6076589E-04
3.8461538	5.6633461E-04	4.4484715E-04
4.8076923	5.5647914E-04	4.9780946E-04
5.7692307	6.1352920E-04	5.2343606E-04
6.7307692	6.1025006E-04	5.1621685E-04
7.6923076	5.6285429E-04	4.7910203E-04
8.6538461	5.2563323E-04	4.6763298E-04
9.6153846	6.2663934E-04	3.0959279E-04
10.576923	2.8167194E-04	1.9592167E-04
11.538461	6.7126317E-04	4.7113996E-05

4 小结

参考方程法对仅有位移观测数据时的小干扰项估计是有效的。其步骤如下：

① 解正问题(3)，得到y_i^r；

② 解(8)，求得反问题的近似解$\bar{p}(t)$；

③ $\bar{p}(t)$可作为进一步校正的基础。即令$p(t)=\bar{p}(t)+\Delta p(t)$，对

$$\ddot{y}(t)=(f(t,y)+\bar{p}(t))+\Delta p(t)$$

重复上述的方法求$\Delta p(t)$。

对方程组模型可用格林函数矩阵法；对参考边值问题只有最小二乘解的情形可用广义格林函数法（见文[3]）。

参 考 文 献

[1] R.Bellman, R. Roth, Quasilinearization and the Identification Problem, World Scientific, 1983.

[1] P.E. Zadunaisky, " On the estimation of small perturbations in ordinary differential equations", *Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations*, P. Deuflhard & E.Hairer editors, 1983.

[3] 李岳生，多点边值问题与样条插值，中国科学，A辑 2 (1983),147—156.

[4] 孙家昶，样条函数与计算几何，科学出版社，1982.

On the Estimation of Small Perturbations in Orbit Determination Problems

Li Loulou

Abstract

A direct method is presented for estimating small perturbations in orbit determination problems, Error bounds are discussed and numerical examples are given.

Keywords Inverse problems, reference equations method, splines