

定常流中立管的多参数分叉

孙明光
(力学系)

摘 要

本文讨论立管在拉力、自重及定常流的影响下的非线性分叉问题。奇摄动法用于求解多个独立参数的摄动分叉解。获得了模拟非对称平衡的分叉曲面。文中同时研究了各分叉曲面的稳定性。

关键词 多参数分叉, 匹配法, 稳定性, 海洋立管

海洋钻探或生产立管、采矿立管、及张力腿平台的腿等细长圆柱体都会受到自重、端部的载荷及外部流体压力的作用。这些载荷的作用会导致上述细长柱的屈曲。人们十分关注柱体屈曲后的特性。如文[1], 研究了重立管在静不稳情形下的后屈曲特性。文[2], 讨论了屈曲后的对称单参数分叉问题, 但模拟非对称平衡的多个独立参数的摄动屈曲问题还未被研究过。按Kolkka^[3]的做法, 我们利用奇摄动方法来解多参数的摄动分叉问题。同时, 也讨论各分叉解的稳定性。

§1. 基本方程

考虑一根在定常流中的立管, 如图1所示, 它受到“自重” We , 及下端的有效张力 $Pe(0)$ 的作用。设立管长为 L 。立管挠度 y 满足微分方程

$$\begin{aligned}
 my_{tt} + EIy_{zzzz} + \frac{1}{2}EI(y_{zz}y_z^2)_{zz} - [(Wez + Pe(0))y_z]_z \\
 - \frac{1}{2}[(Wez + Pe(0))y_z^3]_z - \frac{1}{2}EI(y_{zz}^2y_z)_z = v_m^2R(z)
 \end{aligned} \quad (1)$$

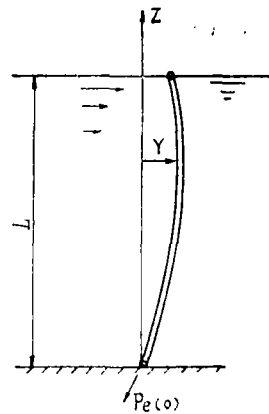


图 1

其中: t 为时间; z 为沿直高度; E 、 I 及 m 分别为杨氏模量, 横截面的面积矩, 及单位长的质量; v_m 为流动速度特征值; $R(z)$ 为阻力分布函数, 可取为 $\frac{1}{2}PDC_D V(z)|V(z)|$, 其中 $V(z)$ 为流速与 v_m 之比, C_D 为阻力系数, D 为直径.

$$\text{令 } Y = y/L, \quad Z = z/L, \quad \mu = \frac{W_e \cdot L^3}{EI}, \quad \lambda = \frac{P_c(0) \cdot L^2}{EI}, \quad \delta = \frac{v_m^2}{gL},$$

$$G(z) = \frac{gL^4 R(z)}{EI}, \quad t^* = t \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad m^* = \frac{mgL^2}{EI}, \text{ 可得无量纲方程}$$

$$m^* Y_{t^* t^*} + Y_{zzzz} + \frac{1}{2} (Y_{zz} Y_z^2)_{zz} - [(\mu z + \lambda) Y_z]_z - \frac{1}{2} [(\mu z + \lambda) Y_z^3]_z - \frac{1}{2} (Y_{zz}^2 Y_z)_z = \delta G(z) \tag{2}$$

一般来说, 存在很多种边界条件^[1], 不失一般性, 我们以下仅处理立管两端为铰支的情形, 即

$$Y(0) = Y_{zz}(0) = Y(1) = Y_{zz}(1) = 0 \tag{3}$$

§2. 分叉问题 ($\delta = 0$)

首先讨论 $\delta = 0$ 时的定常分叉问题, 以及相应的分叉解的稳定性.

设此时 $Y(z)$ 有如下形式的解

$$Y_0(z) = Y_1(z) a + \frac{1}{2!} [a^2 Y_{11} + a \eta Y_{12} + \eta^2 Y_{22}] + \frac{1}{3!} [a^3 Y_{111} + 3a^2 \eta Y_{112} + 3a \eta^2 Y_{122} + \eta^3 Y_{222}] + [O(a + \eta)^4]; \tag{4}$$

$$\lambda = \lambda_{cr} + \lambda_1 a + \lambda_2 \eta + \frac{1}{2!} (\lambda_{11} a^2 + \lambda_{12} a \eta + \lambda_{22} \eta^2) + [O(a + \eta)^3]; \tag{5}$$

$$\mu = \mu_{cr} + \eta \tag{6}$$

其中 a 为小量, 被定义为

$$a = \int_0^1 Y_{0z} Y_{1z} dz, \tag{7}$$

这里 Y_1 为下述线性系统的特征值问题的解

$$Y_{1zzzz} - [(\mu_{cr} z + \lambda_{cr}) Y_{1z}]_z = 0 \tag{8}$$

$$Y_1(0) = Y_{1zz}(0) = Y_1(1) = Y_{1zz}(1) = 0 \tag{9}$$

上述方程在文[5]中已被解出. 我们记单位化的特征函数为 $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$, 相应的特征值关系为

$$\lambda_{crn} = \lambda_n(\mu_{cr}) \tag{10}$$

容易证明下述的正交性 $\int_0^1 f_i z f_j z dz = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$ 不失一般性, 我们设

$$Y = f_1, \quad \lambda_{cr1} = \lambda_1(\mu_{cr}) \tag{11}$$

将(4)–(6)代入(2) (置 $\delta = 0$ 及 $Y_{t^* t^*} = 0$), 比较 $O(a^2)$ 、 $O(a\eta)$ 及 $O(\eta^2)$, 并注意(2)、(3)及(7), 则有

$$\frac{1}{2}Y_{11zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})\frac{1}{2}Y_{11z}]_z - \lambda_1 f_{1zz} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}Y_{12zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})\frac{1}{2}Y_{12z}]_z - (zf_{1z})_z - \lambda_2 f_{1zz} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}Y_{22zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})\frac{1}{2}Y_{22z}]_z = 0, \tag{14}$$

及 $Y_s(0) = Y_{szz}(0) = Y_s(1) = Y_{szz}(1) = 0, \int_0^1 Y_{szz} f_{1z} dz = 0, (s = 11, 12, 22)$ (15)

将 Y_{11} 展为 $Y_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(11)} f_n$, 并代入(12), 得

$$\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(11)} (\lambda_{crn} - \lambda_{cr1}) f_{nzz} - \lambda_1 f_{1zz} = 0 \tag{16}$$

上式乘以 f_1 并从 0 到 1 对 z 积分, 利用 f_{nz} 的正交性, 可得 $\lambda_1 = 0$

再对(16)乘以 $f_m (m \neq 1)$, 并从 0 到 1 对 z 积分, 可得 $a_n^{(11)} = 0, (n \geq 2)$, 而由条件

$$\int_0^1 Y_{11z} f_{1z} dz = 0, \text{ 可知 } a_1^{(11)} = 0, \text{ 因而}$$

$$Y_{11} = 0$$

类似可证,

$$Y_{12} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \int_0^1 z f_{1z} f_{nz} dz}{\lambda_{crn} - \lambda_{cr1}} f_n; \quad \lambda_2 = \int_0^1 z f_{1z}^2 dz; \quad Y_{22} = 0.$$

在(2)式中比较 $O(a^3)$ 、 $O(a^2\eta)$ 、 $O(a\eta^2)$ 及 $O(\eta^3)$, 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}Y_{111zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})\frac{1}{6}Y_{111z}]_z - \frac{1}{2}\lambda_{11}f_{1zz} + \frac{1}{2}(f_{1zz}f_{1z}^2)_{zz} \\ &\quad - \frac{1}{2}[(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})f_{1z}^3]_z - \frac{1}{2}[f_{1z}^2 f_{1z}]_z = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{2}Y_{112zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})\frac{1}{2}Y_{112z}]_z - \frac{1}{2}\lambda_{12}f_{1zz} = 0, \\ &\frac{1}{2}Y_{122zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})\frac{1}{2}Y_{122z}]_z - \frac{1}{2}\lambda_{22}f_{1zz} = 0, \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}Y_{222zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})\frac{1}{2}Y_{222z}]_z = 0 \tag{19}$$

Y_{111} 、 Y_{112} 、 Y_{122} 及 Y_{222} 的边条件与 Y_s 的相同 (如(15)式)。

利用前面的方法, 分别将 Y_{111}, Y_{112}, \dots 在函数空间 f_n 中展开, 则由(17)得到

$$\lambda_{11} = \int_0^1 f_1 \{ (f_{1z}^2 f_{1z})_z + [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})f_{1z}^3]_z - (f_{1zz} f_{1z}^2)_{zz} \} dz, \tag{20}$$

及 $Y_{111} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(111)} f_n,$

其中 $a_n^{(111)} = \frac{3}{\lambda_{crn} - \lambda_{cr1}} \int_0^1 f_n \{ (f_{1z} f_{1z}^2)_{zz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1}) f_{1z}^3]_z - (f_{1zz} f_{1z})_z \} dz.$

由(18)及(19)得到

$$\lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{22} = 0,$$

及 $Y_{112} = 0, \quad Y_{122} = 0, \quad Y_{222} = 0.$

故最后有

$$Y_0 = f_1 a + \frac{1}{2} a \eta \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(12)} f_n + \frac{1}{6} a_3 \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(111)} f_n + (\text{高阶项}), \quad (21)$$

$$\lambda = \lambda_{cr1} + \lambda_2 \eta + \frac{1}{2} \lambda_{11} a^2 + (\text{高阶项}), \quad (22)$$

$$\mu = \mu_{cr} + \eta \quad (23)$$

由(22)及(23)消去 η , 可得

$$(\lambda - \lambda_{cr1}) - \lambda_2 (\mu - \mu_{cr}) = \frac{1}{2} \lambda_{11} a^2. \quad (24)$$

(24)式的示意图如图 2. 分叉解为超临界的. 由文[5]知, 当 $\lambda(\mu_{cr}) > \lambda_1(\mu_{cr})$, 零解为稳定, 当 $\lambda(\mu_{cr}) < \lambda_1(\mu_{cr})$, 零解为不稳定, 而由分叉定理[4], 可证二个分叉解为稳定.

§3. 摄动分叉问题 ($\delta \neq 0$)

以上讨论了完全系统的对称分叉, 现在讨论受定常流扰动后的非对称分叉. 将挠度 Y 展为

$$Y = w_0 + \delta w_1 + \delta^2 w_2 + \delta^3 w_3 + \dots \quad (25)$$

其中 w_0 为 § 2 中的对称分叉解 (分叉后) 及零解 (分叉前), δ 为小量.

以下用渐近匹配方法来求 Y , 先求外解. 因为考虑的是定常分叉问题, 故先将(2)式中 $Y_{i \neq 1}$ 项略去, 然后以(25)式代入, 再比较 δ 的各幂次项. 由 $O(\delta)$ 有

$$w_{1zzzz} - [(\mu z + \lambda) w_{1z}]_z + \frac{1}{2} (w_0, w_0, w_1) = G(z), \quad (26)$$

其中 (w_0, w_0, w_1) 为相应的三个函数交叉干扰项. 在未分叉时, $w_0 = 0$, 相应的 w_1 记为 $w_1^{(1)}$, 由(26)得

$$w_{1zzzz} - [(\mu z + \lambda) w_{1z}^{(1)}]_z = G(z), \quad (27)$$

边条件形式与(10)相同.

(27)的解可表为 $w_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} f_n,$ (28)

其中 $b_n^{(1)} = \int_0^1 G(z) f_n dz / [(\lambda - \lambda_{crn}) - \lambda_2^{(n)} (\mu - \mu_{cr})].$ (29)

当分母为零时, 上式失效, 在后面内解中将处理这一情形. (29) 中的 $\lambda_2^{(1)} = \lambda_2,$

$$\lambda_2^{(n)} = \int_0^1 z f_{nz}^2 dz \quad (n \geq 2).$$

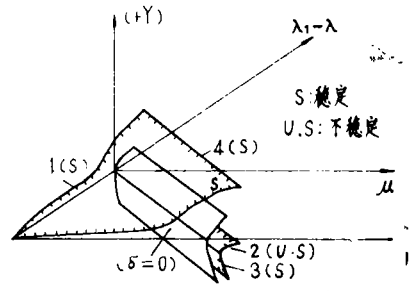


图 2

在分叉之后, $w_0 = Y_0$, 记此时的 w_1 为 $w_1^{(2)}$, 由(26)式可得

$$w_{1zzzz}^{(2)} - [(\mu z + \lambda) w_{1z}^{(2)}]_z + \frac{1}{2} (w_{1zz}^{(2)} Y_{0z}^2)_{zz} + (Y_0 Y_{0z} w_{1z}^{(2)})_{zz} - \frac{3}{2} [(\mu z + \lambda) Y_{0z}^2 w_{1z}^{(2)}]_z - \frac{1}{2} (Y_{0zz}^2 w_{1z}^{(2)}) - (w_{1zz}^{(2)} Y_{0zz} Y_{0z})_z = G(z), \quad (30)$$

展开 $w_1^{(2)}$ 为

$$w_1^{(2)} = w_{10}^{(2)}(z) + a w_{11}^{(2)}(z) + a^2 w_{12}^{(2)}(z) + \dots (\text{高阶项}), \quad (31)$$

将(31)式代入(30), 并比较 $O(1)$ 、 $O(a)$ 及 $O(a^2)$, 得

$$w_{10zzzz}^{(2)} - [(\mu z + \lambda) w_{10z}^{(2)}]_z = G(z), \quad (32)$$

$$w_{11zzzz}^{(2)} - [(\mu z + \lambda) w_{11z}^{(2)}]_z = 0, \quad (33)$$

$$w_{12zzzz}^{(2)} - [(\mu z + \lambda) w_{12z}^{(2)}]_z + [f_{1zz} f_{1z} w_{10}^{(2)}]_{zz} + \frac{1}{2} [f_{1z}^2 w_{10zz}^{(2)}]_{zz} - \frac{3}{2} [(\mu z + \lambda) f_{1z}^2 w_{10z}^{(2)}]_z - \frac{1}{2} (f_{1zz}^2 w_{10z}^{(2)}) - (w_{10}^{(2)} f_{1zz} f_z)_z = 0. \quad (34)$$

$w_{10}^{(2)}$, $w_{11}^{(2)}$ 及 $w_{12}^{(2)}$ 的边条件都与 Y_1 相同 (如(10)式)。

对照(32)与(27), 可知

$$w_{10}^{(2)} = w_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} f_n, \quad (35)$$

而由(33)式知, 当 (μ, λ) 不等于 (μ_{cr}, λ_{cr}) 时, 不存在非零解, 故

$$w_{11}^{(2)} = 0. \quad (36)$$

$$w_{12}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)} f_n \quad (37)$$

将(37)代入(34), 可得

$$C_n^{(2)} = \frac{\int_0^1 f_n \left\{ \frac{3}{2} [(\mu z + \lambda) f_{1z}^2 w_{10z}^{(2)}]_z + \frac{1}{2} (f_{1zz}^2 w_{10z}^{(2)}) + (w_{10}^{(2)} f_{1zz} f_z)_z - (f_{1zz} f_{1z} w_{10}^{(2)})_{zz} - \frac{1}{2} (f_{1z}^2 w_{10zz}^{(2)})_{zz} \right\} dz}{(\lambda - \lambda_{crn}) - \lambda_2^{(n)} (\mu - \mu_{cr})} \quad (38)$$

现在再考虑内解。根据外解的形式, 现把内解展开为

$$Y = a V_1(z, \xi) + [a^2 V_{11}(z, \xi) + 2a\eta V_{12}(z, \xi) + \eta^2 V_{22}(z, \xi)] + [a^3 V_{111}(z, \xi) + 3a^2 \eta V_{112}(z, \xi) + 3a\eta^2 V_{122}(z, \xi) + \eta^3 V_{222}(z, \xi)] + (\text{高阶项}), \quad (39)$$

其中, $\alpha = \delta^{1/3}$, ξ 为内变量, 定义为

$$\xi = \frac{\lambda - \lambda_{cr1} - \lambda_2 \eta}{\frac{1}{2} a^2}. \quad (40)$$

将(39)代入(2) (令 $Y_{i^*i^*} = 0$)，并比较 α 各幂次系数，可得

$$V_{szzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})V_{sz}]_z = 0, \quad (s = 1, 11, 22) \tag{41}$$

$$V_{12zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1})V_{12z}]_z = (A_1 z f_{1z})_z + \lambda_2 A_1 f_{1z}. \tag{42}$$

$V_s (s = 1, 11, 22)$ 及 V_{12} 的边条件与 Y_1 相同 (如(10)式)。

由(41)得 $V_s = A_s(\xi) f_1(z), (s = 1, 11, 22)$ (43)

其中 $A_s(\xi)$ 为未定函数。

令 $V_{12} = \sum_{n=2}^{\infty} d_n f_n$ ，并代入(42)，注意到已知 $\lambda_2 = \int_0^1 z f_{1z}^2 dz$ ，则可证 d_1 为任意，

$$d_n = A_1 \frac{\int_0^1 z f_{1z} f_{nz} dz}{\lambda_{crn} - \lambda_{cr1}} \quad (n \geq 2)$$

记 $d_1 = A_{12}(\xi)$ ，则 V_{12} 可表示为

$$V_{12} = A_{12}(\xi) f_1 + A_1(\xi) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\int_0^1 z f_{1z} f_{nz} dz}{\lambda_{crn} - \lambda_{cr1}} f_n \tag{44}$$

(39)代入(2)后，比较 $O(a^3)$ 得

$$\begin{aligned} V_{111zzzz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1}) V_{111z}]_z - \frac{1}{2} \xi A_1 f_{1zz} + \frac{1}{2} A_1^3 (f_{1zz} f_{1z}^2)_{zz} \\ - \frac{1}{2} A_1^3 [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1}) f_{1z}^3]_z - \frac{1}{2} A_1^3 [f_{1z}^2 f_{1z}]_z = G(z), \end{aligned} \tag{45}$$

令 $V_{111} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n f_n$ ，并代入(45)，然后全式乘以 f_1 ，再对 z 从 0 到 1 积分，则得可解性条件

$$A_1^3 + K_1 \xi A_1 + K_2 = 0 \tag{46}$$

其中

$$K_1 = \frac{1}{\int_0^1 f_1 \{ (f_{1zz} f_{1z}^2)_{zz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1}) f_{1z}^3]_z - [f_{1zz}^2 f_{1z}]_z \} dz} \tag{47}$$

$$K_2 = \frac{-2 \int_0^1 f_1 G(z) dz}{\int_0^1 f_1 \{ (f_{1zz} f_{1z}^2)_{zz} - [(\mu_{cr}z + \lambda_{cr1}) f_{1z}^3]_z - [f_{1zz}^2 f_{1z}]_z \} dz} \tag{48}$$

当 $(\frac{K_2}{2})^2 + (\frac{K_1 \xi}{3})^3 > 0$ 时，(46) 只有一个实根 $A_{1(1)}$ ：

$$A_1 = A_{1(1)} = P + Q \tag{49}$$

当 $(\frac{K_2}{2})^2 + (\frac{K_1 \xi}{3})^3 < 0$ 时，(46) 有三个实根： $A_{1(1)}$ 、 $A_{1(2)}$ 及 $A_{1(3)}$ ， $A_{1(1)}$ 由(49)

表示，而 $A_{1(2)}$ 及 $A_{1(3)}$ 分别为

$$A_{1(2)} = \omega P + \overline{\omega} Q, \tag{50}$$

$$A_{1(3)} = \overline{\omega} P + \omega Q \tag{51}$$

其中
$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \sqrt[3]{-\frac{K_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{K_1 \xi}{3}\right)^3}}, \quad \left(\frac{\omega}{\omega}\right) = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

最后, 使内、外解匹配起来。由上述可知, 相应于未分叉的外解分支为

$$Y_{\text{out}} = \delta \sum_1^{\infty} b_n^{(1)} f_n + \dots = \alpha^3 \sum_1^{\infty} b_n^{(1)} f_n + \dots, \quad (52)$$

分叉后的外解分支为

$$Y_{\text{out}} = (f_1 a + \frac{1}{2} a \eta \sum_2^{\infty} a_n^{(2)} f_n + \frac{1}{6} a^3 \sum_2^{\infty} a_n^{(111)} f_n) + \alpha^3 \left\{ \sum_1^{\infty} b_n^{(1)} + a^2 \sum_1^{\infty} C_n^{(2)} \right\} f_n + O(\delta^2) \quad (53)$$

由 ξ 定义可知 $(\lambda - \lambda_{cr1}) - \lambda_2 \eta = \frac{1}{2} \xi a^2$, 这里 ξ 是点 (μ, λ) 接近于分叉起始线 $\lambda_{cr1} - \lambda_2 \mu_{cr} = 0$ 的一个测度。在此线附近, ξ 很小, 前面也注意到此时外解是无效的。当然, 在 ξ 很小时内解是有效的。而当 (μ, λ) 远离 $(\mu_{cr}, \lambda_{cr1})$ 时, 外解是有效的, 内解则失去意义。我们要使内、外解在 (λ, μ) 的某一范围内匹配起来。匹配时, 将外解中的 $(\lambda - \lambda_{cr1}) - \lambda_2(\mu - \mu_{cr})$ 用内变量 ξ 来表示, 然后使用一般的匹配原则, 确定待定系数 $A_{11}(\xi)$ 等。

外解内展开: 分叉前的分支为

$$Y_{\text{out}} = \alpha^3 \left\{ \frac{\int_0^1 G(z) f_1 dz}{\frac{1}{2} \xi a^2} f_1 + \sum_2^{\infty} b_n^{(1)} f_n \right\}, \quad (54)$$

分叉后的分支为

$$Y_{\text{out}} = Y_0 + \alpha \frac{s f_1}{\xi} + \dots, \quad (55)$$

其中
$$s = 2 \int_0^1 G(z) f_1 dz \left\{ 1 + 3 \int_0^1 f_1 [(\mu_{cr} z + \lambda_{cr1}) f_{1z}^3]_z dz + \dots \right\}.$$

匹配时, λ, μ 固定, 令 $\alpha \rightarrow 0$, 而 $\xi \rightarrow +\infty$ 或 $-\infty$ 。但要注意 $(\lambda - \lambda_{cr1}) - \lambda_2(\mu - \mu_{cr})$ 是固定的小量。准确到 α 阶, 则应有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{Y_{\text{out}} - Y_{\text{in}}}{\alpha} = 0 \quad (56)$$

对未屈曲的分支应用(56)式, 注意此时 $K_1 > 0, K_2 > 0$, 且 $\xi > 0$, 故相应未屈曲分支为(49), 因而(56)给出

$$\frac{K_2}{K_1} = -2 \int_0^1 G(z) f_1 dz \quad (57)$$

而(47)、(48)定义的 K_1 及 K_2 满足(57)式, 故准确到 α 阶, 未屈曲的内、外解分支是匹配的, 如图3中分支1。

现对屈曲后的三个分支应用(56)式, 此时 $\xi < 0$ 。由(54)及(51), 我们再一次得到(57), 即内、外解分支是匹配的, 此相应于对称分叉中的屈曲后零解分支, 如图3中分支2。

对外解的(55)分支, 及内解的(49)及(50)分支, 应用(56)式, 注意到 Y_0 的展开式, 则有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{af_1 - (\pm \alpha \sqrt{K_1 |\xi|}) f_1}{\alpha} = 0 \quad (58)$$

而由(24)及(40)可知, $\lambda_{11} a^2 = \xi a^2$, 注意到现在 $\xi < 0, \lambda_{11} < 0$, 则

$$a = \pm \sqrt{\frac{\xi}{\lambda_{11}}} a$$

故由(58), 得 $\lambda_{11} = -\frac{1}{K_1}$. 由(20)

及(47)知, 这是满足的, 故内、外解是匹配的, 此相当于图3中分支3及4.

更高阶匹配, 可类似进行. 匹配后一致有效渐近式为

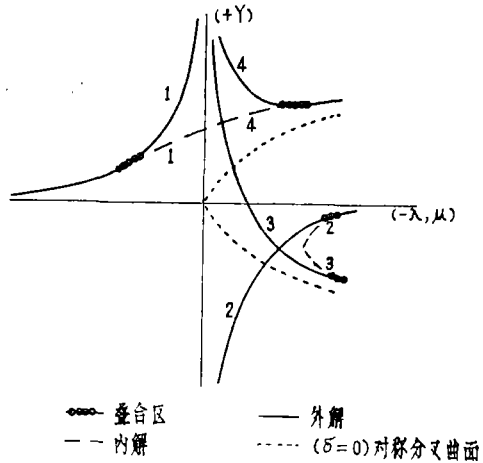


图 3

$$Y = \alpha(P+Q) + [a^2 A_{11(1)} f_1 + \dots] + \delta \sum_1 b_n^{(1)} f_n + \dots - \frac{2\alpha}{\xi} f_1 \int_0^1 G(z) f_1 dz - \dots \quad (\text{分支 1}),$$

$$Y = (\omega P + \omega Q) + [a^2 A_{11(2)} f_1 + \dots] + \delta \sum_1 b_n^{(1)} f_n + \dots - \frac{2\alpha}{\xi} f_1 \int_0^1 G(z) f_1 dz - \dots \quad (\text{分支 2}),$$

$$Y = Y_0 + \delta \left\{ \sum_1 b_n^{(1)} f_n + a^2 \sum_1 C_n^{(2)} f_n + \dots \right\} + \alpha \left(\frac{P+Q}{\omega P + \omega Q} \right) + (\pm \alpha \sqrt{-K_1 \xi} f_1) - \dots \quad (\text{分支 3})$$

以上非对称分叉曲面也示于图2, 为了研究这些非对称分叉解的稳定性, 引入缓变时间 $\alpha t = T$, 由(2)可得稳定性方程(此时(43)的 $A_1(\xi)$ 变为 $A_1(\xi, T)$ 形式)

$$\frac{d^2 A_1}{dT^2} = -s_1 - \xi s_2 A_1 + s_3 A_1^3 \quad (59)$$

其中
$$s_1 = \frac{\int_0^1 G(2) f_1 dz}{\int_0^1 f_1^2 dz}, \quad s_2 = \frac{1}{\int_0^1 f_1^2 dz}, \quad s_3 = \frac{\lambda_{11}}{2 \int_0^1 f_1^2 dz}$$

在我们限制之下, s_1 及 s_2 为正数, s_3 为负数. 对于前述的定常解 A_1 , 现记为 A_{10} , 它的小扰动记为 \bar{A}_{10} , 现令 $A_1 = A_{10} + \bar{A}_{10}$, 注意到 A_{10} 满足 $-s_1 - \xi s_2 A_{10} + s_3 A_{10}^3 = 0$, 即(46)式, 故由(59)式有

$$\frac{d^2 \bar{A}_{10}}{dT^2} = -\xi s_2 \bar{A}_{10} + 3s_3 A_{10}^2 \bar{A}_{10} + O(\bar{A}_{10}^2) \quad (60)$$

取(60)的线性近似, 可得如下结论:

对于屈曲前分支(1), 相应 $\xi > 0, \bar{A}_{10}$ 为周期解, 故原定常解是稳定的. 对于分支(2), 相应 $\xi < 0, A_{10}^2 < -\frac{\xi K_1}{3}, \bar{A}_{10}$ 为指数解(指数为正或负), 故原定常解为不稳定.

对于分支(3)及(4), 相应 $\xi < 0$, 但 $A_{10}^2 > -\frac{\xi K_1}{3}$, 故 \bar{A}_{10} 仍为周期解, 即原定常解为稳定

的。

§4. 结 论

(1)由多参数摄动分叉问题的解,可知:如果立管的自重,或下端的压力超过临界值,则立管会发生屈曲。在无定常流时,屈曲分叉是对称的;在有定常流时,屈曲分叉是不对称的。非零的分叉解分支是稳定的。

(2)由对称分叉与非对称分叉曲线图比较可知,定常流对流向侧的挠度起增大的作用,对反流向侧的挠度则起减弱的作用。

参 考 文 献

- [1] T. Kokkinis and M.M. Bernltsas, Post-Buckling Analysis of Heavy Column with Application to Marine Riser, *J. of ship Research*. 29(1985),3.
- [2] 孙明光, 定常流中细长立管的应力边界层, 水动力学研究与进展, 1986,2.
- [3] R.W. Kolkka, Singular Perturbation of Bifurcation with Multiple independent Bifurcation Parameters, *SIAM J. Appl. Math.*, 44(1984),2.
- [4] G. Iooss and D.D. Joseph, *Elementary stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1978.
- [5] M.M. Bernltsas and T. Kokkinis, Buckling of Column with Movable Boundaries, *J. Struct. Mech.*, 11(1983), 3.

The Multiple Parameters Bifurcation for the Riser in a Steady Flow

Sun Mingguang

Abstract

The nonlinear bifurcation for the riser under the effect including tension, overpull and steady flow, is discussed. The singular perturbation method is employed to solve the perturbed bifurcation problem with multiple independent parameters. Bifurcation curve surfaces which model imperfections aer obtained. Their stability is also investigated.

Keywords Multiple parameters, bifurcation, Matched method, Stability, Marine riser