中山大学学报
1988年第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM No. 4, 1988
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

# 典型实函数族的一类新子族

刘向阳* 林和曾
（数学系）

## 摘 要

本文考虑形如

$$f(z)=\left[\frac{\delta+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z g(w)^{\delta}w^{\gamma-1}dw\right]^{\frac{1}{\delta}}$$

的积分算子，首先证明它保持典型实函数不变，然后引进与该积分算子有密切关系的函数族 T（$\alpha$，$\beta$），并且研究它的一些性质。

**关键词** Skalska函数族，积分算子，典型实函数

我们用$H$表示在单位圆 $|z|<1$ 内解析且形如 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$的函数全体所成的集合。对于实数$\alpha$，$\beta$，定义

$$T=\{f:f\in H,\ \operatorname{Im}z\ \operatorname{Im}f(z)>0,\ (\operatorname{Im}z\neq 0)\}$$

$$T_{\alpha}=\{f:f\in H,\ (1-\alpha)f+\alpha zf'\in T\}$$

$$T(\alpha,\ \beta)=\{f:f\in H,\ \frac{f(z)}{z}\neq 0,\ f^{1-\beta}[(1-\alpha)f+\alpha zf']^{\beta}\in T\}$$

$T$中的函数称为典型实函数。文〔1〕研究了$T_{\alpha}$族的性质。$T(\alpha,\ \beta)$族是$T_{\alpha}$族的扩张，本文主要讨论$T$族与$T(\alpha,\beta)$族函数。

**引理1**〔2〕 若$f\in T$，则 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}g(t,\ z)d\mu(t)$，其中$\mu$为〔0，$2\pi$〕上某个非降函数，$\displaystyle\int_0^{2\pi}d\mu(t)=2\pi$，$g(t,\ z)=z/(1-2z\cos t+z^2)$。

由引理1可知，若$f\in T$，则$f'(x)>0(x\in(-1,\ 1))$。

**引理2** 设$\mu$为〔$a$，$b$〕上的非降函数，$\displaystyle\int_a^b d\mu(t)=1$，若函数$k$在〔$a$，$b$〕上连续且不取

---

本文1987年3月16日收到

* 1987届研究生

零为值，又对每个 $t\in[a,\ b]$，有 $B<\arg k(t)<A$，$A-B\leqslant\pi$。则

$$B<\arg\left(\int_a^b k(t)d\mu(t)\right)<A$$

**定理 1**　设 $\delta\in[-1,\ 1]$，$\delta\neq 0$，$\delta+\gamma>0$，若 $g\in T$，

$$f(z)=\left[\frac{\delta+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z g(t)^{\delta}t^{\gamma-1}dt\right]^{\frac{1}{\delta}}=z+\cdots \tag{1}$$

（其中的幂取主值，以后都如此），则 $f\in T$。

**证明**　令 $t=zu$，$u\in[0,\ 1]$，则（1）可写成

$$f(z)=\left[\int_0^1\left(\frac{g(zu)}{u}\right)^{\delta}du^{\delta+\gamma}\right]^{\frac{1}{\delta}} \tag{2}$$

因对任何 $u\in[0,\ 1]$，都有 $g(zu)/u\in T$，于是，$g(zu)/u$ 关于 $z$ 是 $(-1,\ 1)$ 上的严格增函数，故当 $z\in(0,\ 1)$ 时，$g(zu)/u>0$，当 $z\in(-1,\ 0)$ 时，$g(zu)/u<0$。从而由（2）可知，当 $z\in(0,\ 1)$ 时，$f(z)>0$，当 $z\in(-1,\ 0)$ 时，$f(z)<0$。

对 $\delta\in(0,\ 1]$（当 $\delta\in[-1,\ 0)$，证明类似）。若 $\mathrm{Im}z>0$，则 $\arg\left[\left(\frac{g(zu)}{u}\right)^{\delta}\right]=\delta\arg\left[\frac{g(zu)}{u}\right]\in(0,\ \delta\pi)$，依引理 2，有 $\arg\left[\int_0^1\left(\frac{g(zu)}{u}\right)^{\delta}du^{\delta+\gamma}\right]\in(0,\ \delta\pi)$。由（2）知 $\arg f(z)\in(0,\ \pi)$，即 $\mathrm{Im}f(z)>0$。同理，当 $\mathrm{Im}z<0$ 时，$\mathrm{Im}f(z)<0$。因此 $f\in T$。证毕。

由 $T(\alpha,\ \beta)$ 的定义可得

**定理 2**　若 $f\in T(\alpha,\ \beta)$，$\alpha\beta>0$，则 $f$ 可表为（1）的积分，其中 $g\in T$，$\delta=1/\beta$，$\gamma=\frac{1-\alpha}{\alpha\beta}$。

**定理 3**　若 $\alpha\beta\geqslant 0$，则 $T(\alpha,\ \beta)\subset T$。

**证明**　由于 $T(\alpha,\ 0)=T(0,\ \beta)=T$，故只需证明 $\alpha\beta>0$ 的情形。这时，若 $f\in T(\alpha,\ \beta)$，依定理 2，$f$ 可用积分（1）表示，其中 $g\in T$，$\delta=1/\beta$，$\gamma=(1-\alpha)/\alpha\beta$。于是，当 $|\beta|\geqslant 1$ 时，由定理 1 可知 $f\in T$。

当 $|\beta|<1$ 时，由（2）可知在 $(-1,\ 1)$ 内有 $f'(z)>0$。于是 $f$ 有实系数，并且 $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$。

若 $f\notin T$，则在 $(0,\ 1)$ 中存在一个最大的数 $r$，使得 $\frac{f(rz)}{r}\in T$。这时，曲线 $C(t)=f(re^{it})$ 必与实轴相切，设切点为 $f(z_0)$，$z_0=re^{it_0}$。若 $z_0$ 为实数，则易知曲线 $C(t)$ 关于实轴对称，从而它在点 $f(z_0)$ 不光滑，这是不对的，故 $\mathrm{Im}z_0\neq 0$，依对称性，可设 $\mathrm{Im}z_0>0$。

若 $f(z_0)<0$，则 $|C(t)|$ 在 $t=t_0$ 处非增，因此

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\log|C(t)|_{t=t_0}\geqslant 0$$

因 $|\beta|<1$，$\alpha\beta>0$，故可得

$$\mathrm{Im}[((1-\alpha)+\alpha z_0 f'(z_0)/f(z_0))^{\beta}]\geqslant 0$$

设 $g(z)=f(z)^{1-\beta}[(1-\alpha)f(z)+\alpha zf'(z)]^{\beta}$，则

$$\mathrm{Im}\, g(z_0)=f(z_0)\mathrm{Im}[((1-\alpha)+\alpha z_0 f'(z_0)/f(z_0))^{\beta}]\leqslant 0$$

这与$g\in T$和$\mathrm{Im}\, z_0>0$ 的假设矛盾。

对$f(z_0)>0$的情形，同样可推出矛盾。故$f\in T$。证毕。

**定理 4** (i) 当$\alpha\geqslant 0$，$\beta>\beta'\geqslant 0$（或$\alpha\leqslant 0$，$\beta<\beta'\leqslant 0$）时，$T(\alpha,\beta)\subset T(\alpha,\beta')$。(ii) 当$\beta\geqslant 1$，$\alpha>\alpha'\geqslant 0$（或$\beta\leqslant -1$，$\alpha<\alpha'\leqslant 0$）时，$T(\alpha,\beta)\subset T(\alpha',\beta)$。

**证明** 设$f\in T(\alpha,\beta)$，记$g(z)=f(z)^{1-\beta}[(1-\alpha)f(z)+\alpha zf'(z)]^{\beta}$，则$f,g\in T$。

(i) 我们熟知，当 $f,g\in T$ 时，对 $\lambda\in[0,1]$都有 $f^{1-\lambda}g^{\lambda}\in T$。令 $\lambda=\dfrac{\beta'}{\beta}$，则$\lambda\in[0,1)$，且

$$f^{1-\beta'}[(1-\alpha)f+\alpha zf']^{\beta'}=f^{1-\lambda}g^{\lambda}\in T$$

于是 $f\in T(\alpha,\beta')$。

(ii) 设$\beta\geqslant 1$，$\alpha>\alpha'\geqslant 0$，($\beta\leqslant -1$，$\alpha<\alpha'\leqslant 0$的证法类似)。对于$\mathrm{Im}\, z>0$，设 $x=\arg f(z)$，$y=\arg[(1-\alpha)+\alpha\dfrac{zf'(z)}{f(z)}]$，$s=\arg[(1-\alpha')+\alpha'\dfrac{zf'(z)}{f(z)}]$。则有$x\in(0,\pi)$，$x+\beta y\in(0,\pi)$。因此，1和$(1-\alpha)+\alpha\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$都位于角形域$D=\{w:-\dfrac{x}{\beta}<\arg w<\dfrac{\pi-x}{\beta}\}$中。因$\dfrac{\pi-x}{\beta}-\left(-\dfrac{x}{\beta}\right)=\dfrac{\pi}{\beta}\leqslant\pi$，$0\leqslant\dfrac{\alpha'}{\alpha}<1$，故依引理 2 可知

$$\arg[f(z)^{1-\beta}((1-\alpha')f(z)+\alpha' zf'(z))^{\beta}]=x+\beta s\in(0,\pi)$$

同理可证，当 $\mathrm{Im}\, z<0$ 时，$\arg[f(z)^{1-\beta}((1-\alpha')f(z)+\alpha' zf'(z))^{\beta}]\in(-\pi,0)$。于是得知$f\in T(\alpha',\beta)$。证毕。

**引理 3** 设$a$，$b$，$c$都是实数，$w_0$为方程 $1+cz-az^2=0$ 的离原点最近的根。若 $1+bz+az^2=0$ 在 $|z|<|w_0|$ 内无根，则$\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1+cz-az^2}{1+bz+az^2}\right\}>0$在$|z|<|w_0|$内成立。

**引理 4** 设$dm$为测度空间$X$上的有限正测度，对$x\in X$有$g(x,z)\in T$，且$f(z)=\dfrac{1}{m(X)}\displaystyle\int_X g(x,z)dm(x)$在$|z|<1$ 内解析，则$f\in T$。

**引理 5**[3] 若 $f\in s^*$，$g\in K$，则 $f*g\in s^*$（其中 $S^*$，$K$ 分别表示星形函数族和凸函数族，$f*g$表示$f$与$g$的Hadamard乘积）。

**定理 5** 设$\alpha\geqslant 0$，$r(\alpha)=\sup\{r:\dfrac{f(rz)}{r}\in T(\alpha,1)$，对每个$f\in T\}$。则 $r(\alpha)=(2\alpha+\sqrt{4\alpha^2-2\alpha+1})^{-1}\equiv r_0$。

**证明** 设 $f\in T$，依引理 1，$f(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}g(t,z)d\mu(t)$。其中 $g(t,z)=\dfrac{z}{1-2z\cos t+z^2}\in s^*$。令$F(z)=(1-\alpha)f(z)+\alpha zf'(z)$，则

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[g(t,\ z)*h(z)]d\mu(t)$$

其中$h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}[1+\alpha(n-1)]z^n=\alpha\frac{z}{(1-z)^2}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}$。设$H(z)=zh'(z)$，则由引理3可知，在$|z|<r_0$内有$\mathrm{Re}\frac{zH'(z)}{H(z)}>0$。于是$\frac{H(r_0z)}{r_0}\in s^*$，从而$\frac{h(r_0z)}{r_0}\in K$([4])。依引理5，对$t\in[0,\ 2\pi]$，有$g(t,\ z)*\left(\frac{h(r_0z)}{r_0}\right)\in s^*$，由于$g(t,\ z)*\left(\frac{h(r_0z)}{r_0}\right)$具有实系数，故它也属于$T$。依引理4，可知$\frac{F(r_0z)}{r_0}\in T$，故$\frac{f(r_0z)}{r_0}\in T(\alpha,\ 1)$，即得$r(\alpha)\geqslant r_0$。又因$H'(-r_0)=0$，依引理1可推知当$r'>r_0$时$\frac{H(r'z)}{r'}\notin T$。但$H(z)=(1-\alpha)\frac{z}{(1-z)^2}+\alpha z\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)'$，若记$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$，于是当$r'>r_0$时$\frac{k(r'z)}{r'}\notin T(\alpha,\ 1)$，而易知$k\in T$，因此有$r(\alpha)\leqslant r_0$。故得$r(\alpha)=r_0$。证毕。

**引理 6**　设$|z|<1$，$-1\leqslant s\leqslant 1$，则当$\mathrm{Im}z>0$时

$$\arg\frac{z}{(1+z)^2}\leqslant\arg\frac{z}{1-2sz+z^2}\leqslant\arg\frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\arg\frac{z(1-z)}{(1+z)^3}\leqslant\arg\frac{z(1-z^2)}{(1-2sz+z^2)^2}\leqslant\arg\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

而当$\mathrm{Im}z<0$时，上述不等式反向。

**定理 6**　设$r(\beta)=\sup\{r:\frac{f(rz)}{r}\in T(1,\ \beta)$，对每个$f\in T\}$。则

$$r(\beta)=\begin{cases}1 & \beta=0\\ \sqrt{2}-1 & 0<\beta\leqslant\sqrt{2}-1\\ \beta+1-\sqrt{\beta^2+2\beta}\equiv\beta_0 & \sqrt{2}-1\leqslant\beta\leqslant 1\end{cases}$$

**证明**　$r(0)=1$　是显然的。

首先，对于$0<|z|<\sqrt{2}-1$，有

$$\left|\arg\frac{z}{(1-z)^2}-\arg\frac{z}{(1+z)^2}\right|=\left|\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right|<\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\arg\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}-\arg\frac{z(1-z)}{(1+z)^3}\right|=\left|\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^4\right|<\pi$$

设$f\in T$，则依引理1有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z}{1-2z\cos t+z^2}d\mu(t)$$

$$zf'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z(1-z^2)}{(1-2z\cos t+z^2)^2}d\mu(t)$$

依引理2与引理6，当$|z|<\sqrt{2}-1$，$\mathrm{Im}z>0$时，有

$$\arg\frac{z}{(1+z)^2}\leqslant\arg f(z)\leqslant\arg\frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\arg\frac{z(1-z)}{(1+z)^3}\leqslant\arg zf'(z)\leqslant\arg\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

于是当$\beta\epsilon(0,\ 1]$时，若记$g(z)=\left[\frac{z}{(1+z)^2}\right]^{1-\beta}\left[\frac{z(1-z)}{(1+z)^3}\right]^{\beta}$，

$h(z)=\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right]^{1-\beta}\left[\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}\right]^{\beta}$， 则有

$$\arg g(z)\leqslant\arg[f(z)^{1-\beta}(zf'(z))^{\beta}]\leqslant\arg h(z) \tag{3}$$

依引理3，当$|z|<\beta_0$时，有

$$\mathrm{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}=\mathrm{Re}\frac{1-2(\beta+1)z+z^2}{1-z^2}>0$$

$$\mathrm{Re}\frac{zh'(z)}{h(z)}=\mathrm{Re}\frac{1+2(\beta+1)z+z^2}{1-z^2}>0$$

即$g$与$h$在$|z|<\beta_0$内是星形的，也是典型实的。于是当$\mathrm{Im}z>0$时，$\arg g(z)\epsilon(0,\ \pi)$，$\arg h(z)\epsilon(0,\ \pi)$。从(3)便可知，当$|z|<\min\{\sqrt{2}-1,\ \beta_0\}$，$\mathrm{Im}\,z>0$时，有$\arg[f(z)^{1-\beta}(zf'(z))^{\beta}]\epsilon(0,\pi)$。同理可证，当$|z|<\min\{\sqrt{2}-1,\ \beta_0\}$，$\mathrm{Im}\,z<0$时，有$\arg[f(z)^{1-\beta}(zf'(z))^{\beta}]\epsilon(-\pi,\ 0)$。因此，$r(\beta)\geqslant\min\{\sqrt{2}-1,\ \beta_0\}$。

若令$G(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{(1-z)^2}+\frac{z}{(1+z)^2}\right]$，则$G\epsilon T$，$G'((\sqrt{2}-1)i)=0$。故若记$H(z)=G(z)^{1-\beta}[zG'(z)]^{\beta}$，则当$r>\sqrt{2}-1$，$\beta\epsilon(0,1]$时，$\frac{H(rz)}{r}\notin T$，从而$r(\beta)\leqslant\sqrt{2}-1$。

又若记$F(z)=\frac{z}{(1+z)^2}$，$E(z)=F(z)^{1-\beta}[zF'(z)]^{\beta}$，则有$E'(\beta_0)=0$，因此，当$r>\beta_0$时，$\frac{E(rz)}{r}\notin T$。即$r(\beta)\leqslant\beta_0$。

综上所述，当$\beta\epsilon(0,\ 1]$时$r(\beta)=\min\{\sqrt{2}-1,\ \beta_0\}$。定理证毕。

## 参 考 文 献

〔1〕K. Skalska, Certain subclasses of the class of typically-real functions, Ann. Polon. Math. 38(1980), 141—152.

〔2〕M. S. Robertson, On the coefficients of typically-real functions, Bul. Amer. Math. Soc. 41(1935), 565—572.

[3] S. Ruscheweyh, T. Sheil-Small, Hadamard products of schlicht functions and the polya Schoenberg conjecture, comment. Math. Helv. 48(1973), 119—135.

[4] P. L. Duren, Univalent functions, Springer-verlag, New York (1983).

# New Subclasses of the Class of Typically-real Functions

*Liu Xiangyang　Liu Hezeng*

## Abstract

We prove that the integral operator of the form $f(Z)=\left[\frac{\delta+\gamma}{Z^{\gamma}}\int_0^z g(w)^{\delta}w^{\gamma-1}dw\right]^{1/\delta}$ preserves the class $T$ of typically-real functions if $\delta$ and $\gamma$ satisfy certain restrictions. The subclass $T(\alpha, \beta)$ of $T$, which has close relations with the above integral operator is defined. When $\beta=1$, $T(\alpha, 1)$ is the class of $\alpha$-typically-real functions introduced by Skalska. Properties of $T(\alpha, \beta)$ are discussed and two radius problems are solved.

**Keywords** Skalska class of functions, integral operator, typically-real functions