中山大学学报（自然科学版）
第29卷 第3期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.29 №.3
1990年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1990

带矩形反射边界的随机微分方程的强、弱解与解的稳定性*

司徒荣
（数学系）

摘 要

讨论带矩形反射边界的随机微分方程，可在人口控制系统及神经生理系统的随机模型中得到应用。本文主要结果为：在漂移系数有界可测，扩散系数一致非退化条件下，有弱解存在；在非李氏条件下，存在按轨道唯一的强解。最后，还讨论了解的稳定性。

关键词 反射边界，随机微分方程，强、弱解，稳定性

考虑如下的反射随机微分方程（$RSDE$）

$$\begin{cases} dx_t = b(t,x_t,\omega)dt + \sigma(t,x_t,\omega)dw_t + d\varphi_t, \quad t\geqslant 0, \\ x_0 = x_0 \in \overline{\theta}, \\ x_t \in \overline{\theta}, \quad \forall t \geqslant 0; \\ \varphi_t \text{ 为 } R^d\text{-值 } \mathscr{F}_t\text{-适应连续过程；在任意有限区间上为有限变差，且 } \varphi_0 = 0; \\ \varphi_t = \int_0^t n_s d|\varphi|_s, \\ |\varphi|_t = \int_0^t I_{\partial\theta}(x_s) d|\varphi|_s; \\ n_t \in \mathscr{N}_{x_t}, \text{ 当 } x_t \in \partial\theta; \end{cases} \quad (1)$$

其中，w_t 为 d—维标准布朗运动(BM)；

$\theta = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_d): a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \cdots, d\}$，$(-\infty \leqslant a_i < b_i \leqslant \infty$为预先给定)；

$\partial\theta = \theta$的边界， $\overline{\theta} = \theta \cup \partial\theta$；

$\mathscr{N}_x = \{n \in R^d: |n| = 1, \quad B(x-n, 1) \cap \theta = \phi\}$；

$B(x, r)$为R^d中以x为心，r为半径的开球；

$|\varphi|_t = \varphi$在$[0, t]$上的全变差。

在本文中，恒作如下的假设：

（A） $b = b(t, x, \omega): \overline{R}_+ \times R^d \times \Omega \to R^d$,

$\sigma = \sigma(t, x, \omega): \overline{R}_+ \times R^d \times \Omega \to R^d \otimes R^d$,

其中记 $\overline{R}_+ = [0, \infty)$，并且，$b, \sigma$为三元可测；对任意$x \in R^d$，它们为$\mathscr{F}_t$-适应。

本文1989年12月18日收到

* 中山大学高等学术研究中心、国家自然科学基金、中山大学科学研究基金资助项目

$RSDE$（1）包含了许多有用的情形。例如，当 $-a_i=b_i=\infty, 1\leqslant i\leqslant d$；则 $\partial\theta=\phi$，故 $\varphi_t\equiv 0, \forall t\geqslant 0$。（1）变成无边界的通常随机微分方程；又如，当 $a_i=0, \forall 1\leqslant i\leqslant d; b_i=\infty, \forall 1\leqslant i\leqslant d$；则（1）可用来研究随机人口控制问题[1]；再如，当 $-\infty<a_i<b_i<\infty, \forall 1\leqslant i\leqslant d$，则（1）又可用来研究神经元组成的神经纲络问题[2～3]。

本文中，常常考虑下列情形：

（B）　　$-\infty<a_i<b_i<\infty$

为简单起见，以下设 $d=2$。但这里的研究方法，适用于一般 d 的情形。

注 1　这里的研究方法与结果，其实，同样适用于 θ 为任意有界凸域情形，为此，只需用有限覆盖定理将 $\partial\theta$ 作分解后再讨论。

注 2　现刻划 θ 为矩形的 $\mathscr{N}_x$。由定义可见，若 $x\in\theta$，则 $\mathscr{N}_x=\phi$。若 $x\in\partial\theta$，则 $n=(n_1,n_2)\in\mathscr{N}_x$ 表示如下1)：

若 $x_i=a_i$，且 $a_j<x_j<b_j$，当 $j\neq i$；则　$n_i=1$；$n_j=0$，当 $j\neq i$。

若 $x_i=b_i$，且 $a_j<x_j<b_j$，当 $j\neq i$；则　$n_i=-1$；$n_j=0$，当 $j\neq i$。

若 $x=(c_1,c_2)$，则　$n=(\cos\theta,\sin\theta)$，

其中
$$\theta\in\begin{cases}[0,\ \pi/2], & \text{当 } c_i=a_i,\ i=1,2;\\ [\pi/2,\ \pi], & \text{当 } c_1=b_1,\ c_2=a_2;\\ [\pi,\ 3\pi/2], & \text{当 } c_i=b_i,\ i=1,2;\\ [3\pi/2, 2\pi], & \text{当 } c_1=a_1,\ c_2=b_2.\end{cases}$$

下列结论易得：

引理 1　若 (x_t,φ_t) 满足（1），则对任意 $0\leqslant g(x):\overline{\theta}\to R$ 为Borel可测，有

$$\int_r^t g(x_s)(x_s-y_0)d\varphi_s\leqslant 0,\quad \forall y_0\in\overline{\theta},\quad \forall 0\leqslant r\leqslant t \tag{2}$$

定理 1　设 (x_t,φ_t) 满足（1），　若 $\forall t\geqslant 0$，$\omega\in\Omega$，$x\in R^2$，

1°　$|b(t,x,\omega)|+\|\sigma(t,x,\omega)\|\leqslant k_0(1+|x|)$，并且，（$m\geqslant 2$-自然数）

$$E|x_0|^m<\infty$$

则对任给 $0\leqslant T<\infty$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$，

$$E\{\sup\{|x_t|^m:t\leqslant T\}+\sup\{|\varphi_t|^m:t\leqslant T\}\}\leqslant k_{T,m} \tag{3}$$

$$E\{\sup\{|x_r-x_s|^m:s\leqslant r\leqslant t\}+\sup\{|\varphi_r-\varphi_s|^m:s\leqslant r\leqslant t\}\}\leqslant k_{T,m}|t-s|^{m/2} \tag{4}$$

其中 $k_{T,m}$ 是只依赖于 k_0, m，维数 2 和 T 的常数。

证明　只证（3）在 $m=2$ 情形。（3）的一般情形，可由 Ito 公式，引理 1 及归纳法来完成，取 $y_0\in\overline{\theta}$，由 Ito 公式及引理 1，

$$|x_t-y_0|^2\leqslant|x_0-y_0|^2+2\int_0^t(x_s-y_0)\cdot b(s,x_s,\omega)ds+2\int_0^t(x_s-y_0)\cdot(\sigma(s,x_s,\omega)dw_s)+\int_0^t\|\sigma(s,x_s,\omega)\|^2ds$$

其中 $a\cdot b$ 或 $\langle a,b\rangle$ 表示 a 与 b 之内积，当 $a,b\in R^2$。现由鞅不等式，可得：$\forall t\leqslant T$，

---

1)　若 $a_1=-\infty$，则 $x_1=a_1$ 情形不必考虑，余类似

$$E\{\sup\{|x_s-y_0|^2:s\leqslant t\}\}\leqslant k_1^T+k_2^T\int_0^t E\sup\{|x_r-y_0|^2:r\leqslant s\}\mathrm{d}s,$$

其中用到　$|x_s|^2\leqslant 2|x_s-y_0|^2+2|y_0|^2$　（＊）

由Gronwall不等式及（＊）即得证（3）对 x_t 当 $m=2$ 为真。再由（1），

$$|\varphi_t|^2\leqslant 4\left(|x_0|^2+|x_t|^2+\left|\int_0^t b(s,x_s,\omega)\mathrm{d}s\right|^2+\left|\int_0^t\sigma(s,x_s,\omega)\mathrm{d}w_s\right|^2\right)$$

由此及由上，再用鞅不等式，便完成了（3）在$m=2$成立的证明。（4）的证明类似。

引用〔4〕的定理 1 作为我们的引理 2，为了便于看出结果与维数 d 的关系，仍用d一维情形来叙述。

引理 2　设任给有界Borel可测函数$f=f(t,x):\bar{R}_+\times R^d\to\bar{R}_+$，及$\lambda>0$。则对$\forall\varepsilon>0$，必存在光滑函数$u^\varepsilon(t,x):R\times R^d\to\bar{R}_+$，使得

1）$\sum_{i,j=1}^{d}(\partial^2/\partial x_i\partial x_j)u^\varepsilon h^ih^j\leqslant\lambda u^\varepsilon$，　$\forall h\in R^d$，$|h|=1$；

2）$\forall p\geqslant d+1,\forall(t,x)\in\bar{R}_+\times R^d$，

$$u^\varepsilon(t,x)\leqslant K(p,\lambda,d,\varepsilon)\exp\{-\lambda s\,(d+1)/p\}f\,(t+s,y)\|_{L_p(\bar{R}_+\times R^d)},$$

其中，

$$K(p,\lambda,d,\varepsilon)=\exp\{\varepsilon\lambda(d+1)/p\}p^{d/p}(V_d d!)^{-\frac{1}{p}}\lambda^{\frac{d}{2p}}\cdot(\lambda(d+1))^{\frac{1}{p}-1},$$

V_d为d一维单位球的体积；

3）$|\mathrm{grad}_x u^\varepsilon|\leqslant\lambda^{\frac{1}{2}}u^\varepsilon$；

4）$\forall A=(a_{ij})_{d\times d}$-非负定对称矩阵，

$$\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(\partial^2/\partial x_i\partial x_j)u^\varepsilon-\lambda\,t_r\,Au^\varepsilon\leqslant 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(\partial^2/\partial x_i\partial x_j)u^\varepsilon-\lambda(t_rA+1)u^\varepsilon+(\partial/\partial t)u^\varepsilon\leqslant-(\det A)^{\frac{1}{d+1}}f_\varepsilon；$$

其中f_ε是f之光滑化函数。

现作出$\bar{\theta}$之部分集如下：令

$$\tilde{\theta}_1=\{x\in\bar{\theta}:a_i\leqslant x_i<a_i+\frac{3}{4}(b_i-a_i),\text{对 }i=1,2\text{同时真}\}；$$

$$\tilde{\theta}_2=\{x\in\bar{\theta}:b_i-\frac{3}{4}(b_i-a_i)<x_i\leqslant b_i,\text{对 }i=1,2\text{同时真}\}；$$

$$\tilde{\theta}_3=\{x\in\bar{\theta}:b_1-\frac{3}{4}(b_1-a_1)<x_1\leqslant b_1,\text{且}a_2\leqslant x_2<a_2+\frac{3}{4}(b_2-a_2)\}；$$

$$\tilde{\theta}_4=\{x\in\bar{\theta}:a_1\leqslant x_1<a_1+\frac{3}{4}(b_1-a_1),\text{且}b_2-\frac{3}{4}(b_2-a_2)<x_2\leqslant b_2\}$$

$l_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$，$l_2=-l_1$，$l_3=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$，$l_4=-l_3$；

$\Phi_i(x)=\langle l_i,\ x-\bar{a}^i\rangle$，　$i=1,2,3,4$；

$\bar{a}^1=(a_1,a_2)$，　$\bar{a}^2=(b_1,b_2)$，　$\bar{a}^3=(b_1,a_2)$，　$\bar{a}^4=(a_1,b_2)$。

以下恒设(B)真。若 $x_0\in\tilde{\theta}_i$，则记

$\tau_i=\inf\{t: x_t \overline{\in} \widetilde{\theta}_i\}$，

定理2 设 $b=b(t,x): \bar{R}_+\times R^2\to R^2$，$\sigma=\sigma(t,x): \bar{R}_+\times R^2\to R^2\otimes R^2$ 为二元可测，且满足（记 $A=\frac{1}{2}\sigma\sigma^*$）

$$\begin{cases} |b|+\|\sigma\|\leqslant k_0 \\ \langle A\tilde{\lambda},\ \tilde{\lambda}\rangle\geqslant\delta|\tilde{\lambda}|^2,\quad \forall\tilde{\lambda}\in R^2 \end{cases} \tag{5}$$

其中$k_0\geqslant 0,\delta>0$，均为常数，则对任给$0\leqslant f$ 为有界Borel可测函数，及$p\geqslant 3$，

$$E\int_0^{T\Lambda\tau_i} f(s,x_s)\mathrm{d}s\leqslant c(T,k_0,\delta,2,p)\|f\|_{L_p([0,T]\times R^2)} \tag{6}$$

其中x_t满足（1），$x_0=x\in\widetilde{\theta}_i$，$c$是一个只依赖于$T,k_0,\delta,2,p$的常数

证明 记 $\overline{\varphi_t}=\int_0^t \mathrm{tr}A_s ds$。由Ito公式，可得

$$E\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_{T\Lambda\tau_i})\right\}u^\varepsilon(T,x_T)\exp\{-\lambda(\bar{\varphi}_{T\Lambda\tau_i}+T\Lambda\tau_i)\}$$

$$-E\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_0)\right\}u^\varepsilon(0,x_0)=E\int_0^{T\Lambda\tau_i}\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_s)\right\}$$

$$\cdot\{\exp\{-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)\}\mathrm{grad}_x u^\varepsilon(s,x_s)\cdot b(s,x_s)\}\mathrm{d}s$$

$$+E\int_0^{T\Lambda\tau_i}\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_s)-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)\right\}\left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial s}+\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}-\lambda(\mathrm{tr}A_s\right.$$

$$\left.+1)u^\varepsilon\right]\mathrm{d}s+E\int_0^{T\Lambda\tau_i}\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_s)\right\}\mathrm{grad}_x u^\varepsilon(s,x_s)\exp\left\{-\lambda(\bar{\varphi}_s+s)\right\}\cdot\mathrm{d}\varphi_s$$

$$-\frac{1}{r}E\int_0^{T\Lambda\tau_i}\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_s)-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)\right\}u^\varepsilon(s,x_s)\cdot(\mathrm{grad}_x\Phi_i(x_s)$$

$$\cdot b(s,x_s)+\mathrm{tr}\,(\Phi''_i(x_s)\mathrm{As}))\mathrm{d}s+\frac{1}{r^2}E\int_0^{T\Lambda\tau_i}\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_s)-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)\right\}u^\varepsilon(s,x_s)$$

$$\cdot\mathrm{grad}_x\Phi_i(x_s)\cdot(\mathrm{As}\,\mathrm{grad}_x\Phi_i(x_s))\mathrm{d}s-\frac{2}{r}E\int_0^{T\Lambda\tau_i}\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_s)\right.$$

$$\left.-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)\right\}\mathrm{grad}_x u^\varepsilon(s,x_s)\cdot(\mathrm{A}_s\,\mathrm{grad}_x\Phi_i(x_s))\mathrm{d}s$$

$$-\frac{1}{r}E\int_0^{T\Lambda\tau_i}\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_s)-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)\right\}\cdot u^\varepsilon(s,x_s)\mathrm{grad}_x\Phi_i(x_s)\cdot\mathrm{d}\varphi_s=\sum_{i=1}^7 I^i$$

由引理2的3）可得

$$I_{\partial\theta\cap\widetilde{\theta}_i}(x_s)\left[\nabla_x u^\varepsilon(s,x_s)\cdot n_s-\frac{1}{r}u^\varepsilon(s,x_s)\nabla_x\Phi_i(x_s)\cdot n_s\right]$$

$$\leqslant I_{\partial\theta\cap\widetilde{\theta}_i}(x_s)\cdot u^\varepsilon(s,x_s)\cdot\left(\sqrt{\lambda}-\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\leqslant 0$$

当取 $\gamma<1/\sqrt{2\lambda}$ （7）

因而，在（7）之下，$I^3+I^7\leqslant 0$。

注意到：$\forall i=1-4, x\in\tilde{\theta}$，

$$\begin{cases} 0<c_1\leqslant e^{-\frac{1}{r}\Phi_i(x)}\leqslant c_2<\infty \\ |\nabla_x\Phi_i(x)|+\|\Phi_i''(x)\|\leqslant c_2 \end{cases} \tag{7}$$

其中c_1, c_2是常数，故由2)可得

$$E\exp\left\{-\frac{1}{r}\Phi_i(x_0)\right\}u^\varepsilon(0,x_0)\leqslant K(p,\lambda,2,\varepsilon)\left\|\exp\left\{-\frac{3\lambda s}{p}\right\}f(s,y)\right\|_{L_p(\bar{R}_+\times R^2)}$$

$$=K_\varepsilon\cdot F\leqslant K_1\cdot F$$

由3)与2)　$I^1\leqslant k_0\sqrt{\lambda}\int_0^\infty\exp\left\{-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)+3\lambda s/p\right\}ds\cdot K_1\cdot F\leqslant k_0k_1\sqrt{\lambda}K_1\cdot F$；

$$I^4\leqslant\frac{c_1}{\sqrt{2\lambda}}k_2K_1\cdot F;\quad I^5\leqslant\frac{1}{\lambda}c_2k_3K_1\cdot F;\quad I^6\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}c_2k_4\sqrt{\lambda}K_1\cdot F.$$

类似地，由4)　$I^2\leqslant -c_1E\int_0^{T\wedge\tau_i}(\det A(s,x_s))^{\frac{1}{3}}f_\varepsilon(s,x_s)e^{-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)}ds$.

因此可得　$c_1E\int_0^{T\wedge\tau_i}(\det A(s,x_s))^{\frac{1}{3}}f_\varepsilon(s,x_s)\exp\left\{-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)\right\}ds\leqslant(1+k_0\sqrt{\lambda}k_1$

$$+\frac{c_2}{\sqrt{2\lambda}}k_2+\frac{1}{\lambda}c_2k_3+\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}c_2k_4)K_1F.$$

由通常$\mathscr{L}$-系法等即可完成证明。　□

注3　由上所证，可知常数c其实与T无关。故有更好的估计：

$$E\int_0^{\tau_i}(\det A(s,x_s))^{\frac{1}{3}}f(s,x_s)\exp\left\{-\lambda(\overline{\varphi_s}+s)\right\}ds$$

$$\leqslant\bar{K}(p,\lambda,k_0,\delta,2)\|\exp\{-\lambda\cdot 3s/p\}f(s,y)\|_{L_p(\bar{R}_+\times R^2)}.$$

定理 3　在定理 2 假设下，对于任给$x\in R^2$，(1)必存在一个弱解$(\tilde{x}_t,\tilde{\varphi}_t)$，它定义在某概率空间$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{P})$，上与定义其上的某$BM\,\tilde{w}_t$一起满足(1)，而且，$x_0=x$，$\tilde{P}$—a. s.

注4　定理 3 把〔7〕的有关结果，推广至$RSDE$情形。所有定理，对θ为有界凸域情形仍真。

证明　令　$S_n=\{x\in R^2:|x|\leqslant n\}$

作系数序列$\{b^n,\sigma^n\}_{n=1,2,\cdots}$，使满足

a)　σ^n是具有紧支柱的光滑函数，满足(5)，对$A_n=\frac{1}{2}\sigma^n(\sigma^n)^*$；并且，$\|\sigma^n\|\leqslant k_0$，

$$\|\mathrm{tr}(\sigma-\sigma^n)(\sigma-\sigma^n)^*\|_{L^3([0,n]\times S_n)}\leqslant 2^{-n};$$

b)　b^n 亦是具有紧支柱的光滑函数，并且

$$|b^n|\leqslant k_0,\ \||b-b^n|\|_{L^3([0,n]\times S_n)}\leqslant 2^{-n}.$$

由〔5〕的定理 5.1，存在按轨道唯一的强解(x_t^n,φ_t^n)，在$t\geqslant 0$上满足

$$\begin{cases} dx_t^n = b^n(t, x_t^n)dt + \sigma^n(t, x_t^n)dw_t + d\varphi_t^n \\ x_0^n = x \in \overline{\theta} \\ \text{及(1)中的其它性质对}(x_t^n,\ \varphi_t^n)\text{真.} \end{cases} \tag{8}$$

运用定理1，据〔6〕不难得到：存在概率空间$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}\tilde{P},)$及过程序列$(\tilde{x}_t^{n_h},\ \tilde{\varphi}_t^{n_h},\ \tilde{w}_t^{n_h})$，使得

1) 它的有限维分布与$\left(x_t^{n_h},\ \varphi_t^{n_h},\ w_t^{n_h}\right)$的一样；

2) 存在过程$(\tilde{x}_t, \tilde{\varphi}_t, \tilde{w}_t)$，使得$(\tilde{x}_t^{n_h},\ \tilde{\varphi}_t^{n_k}, \tilde{w}_t^{n_h})$在任意$t\in[0,T]$上一致收敛于前者，当$h\to\infty$；其中$T<\infty$为任给。

以下，为简计，仍记n_h为k.类似于〔7〕，同样可证：$\tilde{w}_t^n$是$\tilde{P}$—BM，并且$(\tilde{x}_t^n,\ \tilde{\varphi}_t^n,\ \tilde{w}_t^n)$满足（8），$\tilde{P}$—$a.s.$现设$x\in\tilde{\theta}_1$.记

$$\tau_1^n = \inf\{t\geqslant 0: \tilde{x}_t^n \bar{\in} \tilde{\theta}_1\}\ ,\quad n=0,1,\cdots$$

其中，记$\tilde{x}_t^0=\tilde{x}_t$.注意到，由2)可得：当$n\to\infty$， $\tau_1^n \longrightarrow \tau_1^0$， $\tilde{P}$—$a,s.$
故类似于〔7〕，运用定理2，可得：$\forall\varepsilon>0$，当$n\to\infty$，

$$\tilde{P}\left(\left|\int_0^{t\Lambda\tau_1} b^n(s,\tilde{x}_s^n)ds - \int_0^{t\Lambda\tau_1} b(s,\tilde{x}_s)ds\right|>\varepsilon\right)\to 0,$$

$$\tilde{P}\left(\left|\int_0^{t\Lambda\tau_1} \sigma^n(s,\tilde{x}_s^n)d\tilde{w}_s^n - \int_0^{t\Lambda\tau_1} \sigma(s,\tilde{x}_s)d\tilde{w}_s\right|>\varepsilon\right)\to 0$$

因而，$\forall t\geqslant 0$，当$n\to\infty$

$$\tilde{\varphi}^n_{t\Lambda\tau_1} = \tilde{x}^n_{t\Lambda\tau_1} - x - \int_0^{t\Lambda\tau_1} b^n(s,\tilde{x}_s^n)ds - \int_0^{t\Lambda\tau_1}\sigma^n(s,\tilde{x}_s^n)d\tilde{w}_s^n \longrightarrow$$

$$\tilde{\varphi}_{t\Lambda\tau_1} = \tilde{x}_{t\Lambda\tau_1} - x - \int_0^{t\Lambda\tau_1} b(s,\tilde{x}_s)ds - \int_0^{t\Lambda\tau_1}\sigma(s,\tilde{x}_s)d\tilde{w}_s\ ,\quad \text{in}\tilde{P}.$$

现由〔5〕的定理4.1，对

$$y_t = \int_0^t b(s,\tilde{x}_s)ds + \int_0^t \sigma(s,\tilde{x}_s)d\tilde{w}_s \qquad (y_t^n\text{类似定义})$$

及初值x，$\exists(\overline{\overline{x}}_t, \overline{\overline{\varphi}}_t)$满足

$$\begin{cases} \overline{\overline{x}}_t = x + y_t + \overline{\overline{\varphi}}_t\ , \qquad \forall t\geqslant 0, \\ \overline{\overline{x}}_0 = x \\ (\overline{\overline{x}}_t, \overline{\overline{\varphi}}_t)\text{满足（1）中其它性质} \end{cases} \tag{9}$$

并且，$\exists F(t,y):(t,y)\in[0,\infty)\times C\to C$，它是连续映射，使

$$\overline{\overline{x}}_t = F(t, y(\cdot)),$$

其中C是$[0,\infty)$至R^2的全体连续映射，其拓扑由通常办法定义，现记

$$Z_t^n=\int_0^t \sigma^n(s,\tilde{x}_s^n)\mathrm{d}\tilde{w}_s^n,\quad Z_t=\int_0^t \sigma(s,\tilde{x}_s)\mathrm{d}\tilde{w}_s,\qquad M_t^n=Z_t-Z_t^n$$

记 $t'=t\Lambda\tau_1$. 由上已证：当 $n\to\infty$

$$Z_{t'}^n\to Z_{t'},\qquad \text{in } \tilde{P} \tag{10}$$

但，$\quad E^{\tilde{P}}|Z_t^n|^4\leqslant K_1^4t^2,\qquad \forall n=0,1,2,\cdots,$

其中记 $Z_t^0=Z_t$. 故 $\left\{|Z_t^n|^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ 为一致可积。注意到 $\forall\varepsilon>0$,

$$E^{\tilde{P}}|Z_t^n-Z_t|^2\leqslant\varepsilon^2+E^{\tilde{P}}\ I_{(|Z_t^n-Z_t|>\varepsilon)}2(|Z_t^n|^2+|Z_t|^2)$$

由(10)及一致可积性，得知：当 $n\to\infty$，$\quad E^{\tilde{P}}\langle M^n\rangle_{t'}=E^{\tilde{P}}|M_{t'}^n|^2\to0$.

类似地，可证：当 $n\to\infty\quad E^{\tilde{P}}\int_0^t|b^n(s,\tilde{x}_s^n)-b(s,\tilde{x}_s)|^2\mathrm{d}s\to0$.

由此，可推证：当 $n\to\infty$，$\quad E^{\tilde{P}}\sup\{|y_s^n-y_s|^2:s\leqslant t'\}\to0$.

因而，$\exists n_K\uparrow\infty$，使得：当 $K\uparrow\infty$，$\forall T<\infty$，$\sup\{|y_s^{n_K}-y_s|^2:s\leqslant T'\}\to0$

其中 $T'=T\Lambda\tau_1$. 因而，当 $K\uparrow\infty$，$\forall T<\infty$，

$$\sup\{|\tilde{x}_t^{n_K}-\bar{\bar{x}}_t|:t\leqslant T'\}\to0,\quad \sup\{|\tilde{\varphi}_t^{n_K}-\bar{\bar{\varphi}}_t|:t\leqslant T'\}\to0$$

由极限唯一性，得：$\forall t\geqslant0$,

$$\tilde{x}_{t\Lambda\tau_1}=\bar{\bar{x}}_{t\Lambda\tau_1},\qquad \tilde{\varphi}_{t\Lambda\tau_1}=\bar{\bar{\varphi}}_{t\Lambda\tau_1}$$

这就证明了：$(\tilde{x}_t,\tilde{\varphi}_t,\tilde{w}_t)$ 在 $t\in[0,\tau_1)$ 上满足(1)，在概率空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}},\tilde{P})$ 上。现注意到由[6]，$\tilde{\Omega}$ 可取为 $[0,1]$，因而它是标准可测空间。仿照[8]，$\exists\Lambda\in\tilde{\mathscr{F}},\tilde{P}(\Lambda)=0$，使得：任取 $\omega\bar{\in}\Lambda$，有

$$\tau_1(\omega')=\tau_1(\omega),\quad P(\cdot|\mathscr{F}_{\tau_1})(\omega)-a.s.\omega'.$$

并且 $P(\cdot|\mathscr{F}_{\tau_1})$ 是正则条件概率；进一步，还有：任取 $\omega\bar{\in}\Lambda$，若 $\tau_1(\omega)<\infty$，则[8]

$$\tilde{x}_{\tau_1}(\omega')=\tilde{x}_{\tau_1}(\omega),\quad P(\cdot|\mathscr{F}_{\tau_1})(\omega)-a.s.\omega'.$$

设 $\tilde{x}_{\tau_1}(\omega)\in\tilde{\theta}_i$. 记 $\quad \tau_{12}=\inf\{t\geqslant\tau_1:x_t\bar{\in}\tilde{\theta}_i\}$

则仿上可证

$$\tilde{P}(\sup_{\tau_1\leqslant t}|\tilde{x}_{t\Lambda\tau_{12}}-\tilde{x}_{\tau_1}-\int_{\tau_1}^{t\Lambda\tau_{12}}b(s,\tilde{x}_s)\mathrm{d}s-\int_{\tau_1}^{t\Lambda\tau_{12}}\sigma(s,\tilde{x}_s)\mathrm{d}\tilde{w}_s-\tilde{\varphi}_{t\Lambda\tau_{12}}|$$
$$=0|\mathscr{F}_{\tau_1})(\omega)=1.$$

因而 $\quad \tilde{P}(\sup_{0\leqslant t}|\tilde{x}_{t\Lambda\tau_{12}}-x-\int_0^{t\Lambda\tau_{12}}b(s,\tilde{x}_s)\mathrm{d}s-\int_0^{t\Lambda\tau_{12}}\sigma(s,\tilde{x}_s)\mathrm{d}\tilde{w}_s-\tilde{\varphi}_{t\Lambda\tau_{12}}|=0)=1$

由上类推，最后可得证：$\tilde{P}-a.s.$

$$\tilde{x}_t = x + \int_0^t b(s,\tilde{x}_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,\tilde{x}_s)\mathrm{d}\tilde{w}_s + \tilde{\varphi}_t,\ \forall t \geqslant 0;$$

并且$(\tilde{x}_t, \tilde{\varphi}_t)$满足（1）中其它性质。（这由极限唯一性及$(\bar{\bar{x}}_t, \bar{\bar{\varphi}}_t)$满足（9）知）。 □

下面来讨论（1）的解的按轨道唯一性及强解的存在性。

定理 4 设$\forall t \geqslant 0$，$x \in \overline{\theta}$，

2° $|b(t,x,\omega)| + \|\sigma(t,x,\omega)\| \leqslant k_0$， k_0 为常数；

3° $2(x-y)\cdot(b(t,x,\omega)-b(t,y,\omega)) + \|\sigma(t,x,\omega)-\sigma(t,y,\omega)\|^2$

$$\leqslant K(t)\rho(|x-y|^2), \qquad \forall x,y \in \overline{\theta};$$

其中，$0 \leqslant K(t)$，$\int_0^T K(t)\mathrm{d}t < \infty$，对$\forall T < \infty$真；$\rho(u)\uparrow$，向上凸，定义在$u \geqslant 0$上；并且$\rho(0)=0$，$\rho(u)>0$，当$u>0$，$\int_{0+} \mathrm{d}u/\rho(u) = \infty$。

若$(x_t^i, \varphi_t^i, w_t)$，$i=1,2$，在相同的概率空间上满足（1）（为简计，设$(\Omega, \mathscr{F})$为标准可测空间），且 $x_0^1 = x_0^2 = x \in \overline{\theta}$；

（现设d＝2）。则对于$h_t^i = x_t^i$或φ_t^i，$i=1,2$，有

$$P(\sup\{|h_t^1 - h_t^2| : 0 \leqslant t\} = 0) = 1 \tag{11}$$

证明 由Ito公式，可得

$$\begin{aligned} E|x_t^1 - x_t^2|^2 = & E\int_0^t 2(x_s^1 - x_s^2)\cdot(b(s,x_s^1,\omega) - b(s,x_s^2,\omega)) + \|\sigma(s,x_s^1,\omega) \\ & -\sigma(s,x_s^2,\omega\|^2)\mathrm{d}s + \mathrm{E}\int_0^t \{(-2(x_s^1 - x_s^2)\cdot n_{x_s^2} I_{\partial\theta}(x_s^2)\,\mathrm{d}|\varphi^2|_s \\ & + 2(x_s^1 - x_s^2)\cdot n_{x_s^1} I_{\partial\theta}(x_s^1)\mathrm{d}|\varphi^1|_s\} \end{aligned} \tag{12}$$

注意到（2）及假设，即得

$$\mathrm{E}|x_t^1 - x_t^2|^2 \leqslant \mathrm{E}\int_0^t K(s)\rho(|x_s^1 - x_s^2|^2)\mathrm{d}s.$$

因此，仿照〔9〕，即得证

$$P(\sup_{0 \leqslant t} |x_t^1 - x_t^2| = 0) = 1$$

由此及由（1），即可得(11)对φ_t也真。 □

注意到〔8〕第4章定理1.1对系统（1）仍真[6,8]故由定理3与4立即推出下面的定理真。

定理 5 在定理3与4的假设下，（1）存在一个按轨道唯一的强解；亦即$\exists(x_t, \varphi_t)$满足（1），它是按轨道唯一的，并且(x_t, φ_t)为$\mathscr{F}_t^w$-适应。

系统（1）的解还可以有下列的稳定性。

定理 6 设定理4的条件满足，且系数$b(t,x)$，$\sigma(t,x)$为非随机，并且关于x为连

续。若还有$0\in\overline{\theta}$，并设

4° $b(s,0)=\sigma(s,0)=0$，$\forall s\geqslant 0$。

则 1) $(0,0)$是(1)关于初值$x_0=0$的一个按轨道唯一强解；

2) 若$(x_t^{x_0},\varphi_t^{x_0})$是(1)关于$x_0=x\in\overline{\theta}$之强解(由〔5〕或〔10〕及定理4，与Y-W定理知强解必存在且按轨道唯一)，并设在定理4之条件2°中，$\rho(u)=u$。

若再设

$$|b(t,x)|^2\leqslant\overline{K}(t)|x|^2 \tag{13}$$

其中，$0\leqslant\overline{K}(t)$，$\int_0^T\overline{K}(t)\mathrm{d}t<\infty$，对 $\forall T<\infty$真。则

$$\lim_{x_0\to 0}E(\sup_{s\leqslant t}|x_s^{x_0}|^2)=0,\quad \forall t\geqslant 0 \tag{14}$$

$$\lim_{x_0\to 0}E(\sup_{s\leqslant t}|\varphi_s^{x_0}|^2)=0,\quad \forall t\geqslant 0 \tag{15}$$

证明 类似于(12)，有 （$\overline{K}(t)$性质与$K(t)$相仿）

$$E\sup\{|x_s^{x_0}|^2:s\leqslant t\}\leqslant(|x_0|^2+\int_0^t\overline{K}(s)(E\sup\{|x_r^{x_0}|^2:r\leqslant s\})\mathrm{d}s)\cdot k_1$$

故由Gronwall不等式，即得证(14)。

由(1)及(13)，

$$|\varphi_t|^2\leqslant 4(|x_0|^2+|x_t|^2+t\int_0^t\overline{K}(s)|x_s|^2\,\mathrm{d}s+|\int_0^t\sigma(s,x_s)\mathrm{d}w_s|^2)$$

故由鞅不等式，得到：当$t\leqslant T<\infty$，

$$E\sup_{s\leqslant t}|\varphi_s|^2\leqslant k_T(E\sup_{s\leqslant t}|x_s|^2+|x_0|^2),$$

其中k_T为依赖于T的常数。由此，运用(14)，便可推出(15)。 □

关于解的指数稳定性，我们还有下列定理。

定理 7 在定理6条件下，若还有

5° $2x\cdot b(t,x)+\|\sigma(t,x)\|^2\leqslant -k_1|x|^2$，

其中$k_1>0$是常数，则

$$E|x_t|^2\leqslant E\|x_0\|^2\exp(-k_1 t),\quad \forall t\geqslant 0. \tag{16}$$

进一步，设$0\in\theta$，则还有

$$E|\varphi_t|\leqslant k_2\exp(-k_3 t)E|x_0|^2,\quad \forall t\geqslant 0, \tag{17}$$

其中$k_2,k_3>0$为常数。

证明 由设5°及(12)得

$$E|x_t|^2\leqslant E|x_0|^2-k_1\int_0^t E|x_s|^2\mathrm{d}s \tag{18}$$

由(18)得证(16)。取$y_0\in\theta$。由(18)，又得

$$\begin{aligned}E|x_t|^2&\leqslant E|x_0|^2-k_1\int_0^t E|x_s|^2\mathrm{d}s+E\int_0^t(x_s-y_0)\cdot\mathrm{d}\varphi_s+Ey_0\cdot\varphi_t\\&\leqslant E|x_0|^2-k_1\int_0^t E|x_s|^2\mathrm{d}s+Ey_0\cdot\varphi_t\end{aligned}$$

故可得

$$-Ey_0\cdot\varphi_t\leqslant E|x_0|^2-k_1\int_0^t E|x_s|^2\mathrm{d}s \tag{19}$$

现设$0\epsilon\theta$。记$\delta_0>0$为0至边界之最短距离。令（设$0<\delta_1<\delta_0$）

$$y_0=\begin{cases}-\delta_1\dfrac{\varphi_t}{|\varphi_t|}, & 当\varphi_t\neq 0;\\ 0, & 当\varphi_t=0。\end{cases}$$

则由(19)，可得 $E|\varphi_t|\leqslant\dfrac{1}{\delta_1}E|x_0|^2$

注意到：当$0\leqslant t\leqslant T$，

$$E|\varphi_t|\leqslant\frac{1}{\delta_1}E|x_0|^2-\frac{k_1}{\delta_1}\int_0^t E(|x_s|^2+|\varphi_s|)ds+\frac{k_1}{\delta_1}\int_0^t E|\varphi_s|ds$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta_1}E|x_0|^2\left(1+\frac{k_1}{\delta_1}T\right)-\frac{k_1}{\delta_1}\int_0^t E(|x_s|^2+|\varphi_s|)ds \tag{20$_1$}$$

由(18)，又得：当$0\leqslant t\leqslant T$，

$$E|x_t|^2\leqslant E|x_0|^2-k_1\int_0^t E(|x_s|^2+|\varphi_s|)ds+\frac{k_1}{\delta_1}E|x_0|^2T \tag{20$_2$}$$

由$(20)_1$与$(20)_2$，得：当$0\leqslant t\leqslant T$，

$$E(|x_t|^2+|\varphi_t|)\leqslant\left(1+\frac{1}{\delta_1}+\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_1^2}\right)k_1T\right)E|x_0|^2$$

$$-\left(1+\frac{1}{\delta_1}\right)k_1\int_0^t E(|x_s|^2+|\varphi_s|)ds$$

故由Gronwall不等式，当$0\leqslant t\leqslant T$，

$$E(|x_t|^2+|\varphi_t|)\leqslant\left[1+\frac{1}{\delta_1}+\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_1^2}\right)k_1T\right]E|x_0|^2\cdot\exp\left\{-\left(1+\frac{1}{\delta_1}\right)k_1t\right\}$$

故当T够大时，得到

$$E(|x_T|^2+\varphi_T|)\leqslant\left(2+\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_1^2}\right)k_1\right)E|x_0|^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\delta_1}\right)k_1T\right\}\ \square$$

下列解的极限定理，可对$|x_t^n-x_t|^2$运用Ito公式，由(2)及[9]中引理1等证明。

定理8 设(x_t^n,φ_t^n)满足

$$\begin{cases}dx_t^n=b^n(t,x_t^n\omega)dt+\sigma^n(t,x_t^n,\omega)dw_t+d\varphi_t^n, & t\geqslant 0\\ x_0^n=x_0^n\in\overline{\theta}\\ 及(1)中其它性质对(x_t^n,\varphi_t^n)真\end{cases}$$

$n=0,1,2,\cdots$又设（记$x_t^0=x_t$等）

(i) $2(x-y)\cdot(b(t,x,\omega)-b(t,y,\omega))+2\|\sigma(t,x,\omega)-\sigma(t,y,\omega)\|^2$

$\leqslant F(t,\omega)\cdot|x-y|^2$, $\int_0^T F(t,\omega)dt<\infty$, $\forall T<\infty$

其中，$0\leqslant F(t,\omega)$；

(ii) $|b^n(t,x,\omega)-b(t,x,\omega)|^2+\|\sigma^n(t,x,\omega)-\sigma(t,x,\omega)\|^2\leqslant F^n(t,\omega)$,

$\lim\limits_{n\to\infty}E\int_0^t F^n(s,\omega)ds=0$, $\forall t\geqslant 0$；

(iii) $\|\sigma^n(t,x,\omega)\|^2\leqslant G(t,\omega)$, $n=0,1,2,\cdots$

$$\int_0^T G(t,\omega)\mathrm{d}t<\infty,\quad \forall 0\leqslant T<\infty;$$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} E\,|x_0^n-x_0|^2=0;$

则（记$\bar{F}_1(t,\omega)=F(t,\omega)+1$）

$$\lim_{n\to\infty} E[\exp(-\int_0^t \bar{F}_1(s,\omega)\mathrm{d}s)\cdot|x_t^n-x_t|^2]=0 \tag{21}$$

进一步，设(ⅰ)中，$|F(t,\omega)|\leqslant k_0$，则

$$\lim_{n\to\infty} E|x_t^n-x_t|^2=0,\quad \forall t\geqslant 0. \tag{22$_1$}$$

若还有　$|b(t,x,\omega)-b(t,y,\omega)|\leqslant k_0|x-y|;$

则

$$\lim_{n\to\infty} E|\varphi_t^n-\varphi_t|^2=0. \tag{22$_2$}$$

参 考 文 献

〔1〕 于景元等，系统科学与数学，7 (1987), 3, 214～219.

〔2〕 Hopfield J J, *Proc. Natl. Aca. Sci. USA.* 79(1982), 2554～2558

〔3〕 Hopfield J J, *Proc. Natl. Acad. Soi. USA.* 81(1984), 3088～3092

〔4〕 Anulova S, *Isv. AN SSSR ser. Math.*, 42(1978), 4, 708～750, (In Russian)

〔5〕 Saisho Y, *Probab. Th. Relat. Fields*, 74(1987), 455～477

〔6〕 Skorokhod A V, Studies in the Theory of Random Processes. Scripta Technica. Washington. 1965

〔7〕 Krylov N V, Controlled Diffusion Processes. Springer-Verlag, N. Y. 1980

〔8〕 Ikeda N et al; Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland, 1981

〔9〕 司徒荣，中山大学学报（自然科学）论丛〔3〕，1984, 1～12

〔10〕 Lions P L et al., *Commun. on Pure & Appl. Math.* 37(1984), 511～537

On Existence and Stability of Solutions for Reflecting Stochastic Differential Equations with Rectangular Boundary

*Situ Rong**

Abstract

For reflecting stoohastic differential equations with rectangular boundary, which can be used as a stochastic model for population control systems and neural network systems [1-3], the existence of weak and strong solutions are obtained under the assumption that the drift coefficient is bounded measurable, the diffusion coefficient is uniformly non-degenerate and under non-Lipschitz condition, respectively. Under appropriate condition the stability of solutions is also derived.

Keywords reflecting boundary, stochastic differential equations, strong solutions, weak solufions, stalility

* Department of Mathematics