

联立方程内生变量系数IV估计 量的精确分布*

滕成业 陈继文**

(计算机科学系)

摘要

在联立方程中扰动项遵循第三类椭球等高分布时, 导出了单一方程内生变量系数的工具变量法 (IV) 估计量的精确分布。

关键词 椭球等高分布, 工具变量法, 带状多项式

1 引言

考虑一个有 $n+1$ 个内生变量、 K 个外生变量、具有 T 个观测值的联立方程系统

$$YG + Z\Gamma = U \quad (1)$$

其中 $Y_{T \times (n+1)}$ 为 $n+1$ 个内生变量及其 T 个观测值, $Z_{T \times K}$ 为 K 个外生变量及其 T 个观测值, $G_{(n+1) \times (n+1)}$ 非奇异, $\Gamma_{K \times (n+1)}$ 分别为内生及外生变量的待估系数, $U_{T \times (n+1)}$ 为随机扰动项。

第一个结构方程为:

$$y_1 = Y_2\beta + Z_1\gamma + u_1 \quad (2)$$

其中 Z_1 为此方程所包含的 K_1 个外生变量的 T 个观测值, $Y = (y_1 \ Y_2)$, y_1 为第一个内生变量的 T 个观测值, $\beta_{n \times 1}$ 和 $\gamma_{K_1 \times 1}$ 为待估系数向量, u_1 是 $T \times 1$ 阶的干扰项。

(1) 式的简约式为

$$Y = Z\Pi + V \quad (3)$$

其中 $\Pi = -\Gamma G^{-1}$, $V = UG^{-1}$ 。

在经济计量学中很重视对估计量精确分布的研究^[1]。关于联立方程参数估计量精

本文1988年1月收到

* 本文得到美国普林斯顿大学 G. C. Chow 和耶鲁大学 P. C. B. Phillips 的帮助。

** 1986级研究生

确分布的研究是从Richardson⁽²⁾(1968)、Sawa⁽³⁾(1969)开始的,在 $n=1$ 时,他们将 $\widehat{\beta}_{TSLS}$ 的密度函数表示为无穷级数,其工作都是在扰动项为正态分布时作的,即 $V \sim N_{T, n+1}(\mathbf{0}, I \otimes \Sigma)$, $\Sigma > 0$. 本文设定联立方程组在扰动项遵循第三类椭圆高分布,即 $V \sim LE_{T, n+1}(\mathbf{0}, \Sigma, g)$ (参见文[4])得出内生变量系数工具变量法(N)估计量的精确分布,推广了Phillips⁽⁵⁾(1980)的结果.

2 一些有关的结果

本文的基础是广义非中心 Wishart 分布,即定理 1⁽²⁾. 这种广义非中心 Wishart 分布是对第三类椭圆等高分布族而言的. 广义非中心 Wishart 分布的密度函数表达式用到了带状多项式,有关内容参见文[6-10].

定理 1 设 Z 为 $N \times m$ 随机矩阵($N \geq m$),它有密度函数

$$\text{pdf}(Z) = (\det \Sigma)^{-N/2} g[\text{tr} \Sigma^{-1}(Z - M)'(Z - M)]$$

其中 M 为 $N \times m$ 常数矩阵, $\Sigma_{m \times m} > 0$, $g(\cdot)$ 为一元实函数. 令 $A = Z'Z$,称 A 为广义非中心 Wishart 矩阵. 如果 $g(\cdot)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有 Taylor 展式,则 A 有密度函数

$$\begin{aligned} \text{pdf}(A) = & \frac{\pi^{mN/2}}{\Gamma_m\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot (\det \Sigma)^{-N/2} \cdot (\det A)^{(N-m-1)/2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(2k)} \cdot \\ & \cdot [\text{tr}(\Sigma^{-1}A + \Omega)] \cdot \sum_{\kappa \rightarrow k} \frac{1}{\binom{N}{2}_{\kappa}} C_{\kappa}(\Omega \Sigma^{-1}A). \quad (A > 0) \end{aligned}$$

其中 κ 是不超过 m 份的 k 的划分, $\sum_{\kappa \rightarrow k}$ 表示对 k 的所有这些划分求和, $\Gamma_m\left(\frac{N}{2}\right)$ 是多元伽玛函数, $C_{\kappa}(\cdot)$ 是带状多项式, $\Omega = \Sigma^{-1}M'M$ 表示非中心参数. 简记为:
 $A \sim GW_m(N, \Sigma, g, \Omega)$.

引理 1⁽⁷⁾ 设 X, Y 为 $m \times m$ 对称阵, κ 为 k 的划分, λ 为 l 的划分, ϕ 为 $f = k + l$ 的划分, $k, l \geq 0$, α, β 为纯量, 则

$$(i) \quad C_{\phi}(X + Y) = \sum_{\kappa, \lambda \in \phi} \binom{f}{k} \theta_{\phi}^{\kappa, \lambda} C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y)$$

其中 $\theta_{\phi}^{\kappa, \lambda} = C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(I, I) / C_{\phi}(I)$

$$(ii) \quad C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(\alpha X, \beta Y) = \alpha^k \beta^l C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y)$$

引理 2⁽⁸⁾ 设 X, B 是 $m \times m$ 阶对称阵, A 为 $m \times m$ 阶矩阵, ϕ, κ, λ 同引理 1 所设, 则

$$\int_{O(m)} C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(A'H'XHA, B)(dH) = C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(A'A, B) C_{\kappa}(B) / C_{\kappa}(I) \quad (4)$$

其中 $O(m)$ 为 $m \times m$ 阶正交矩阵组成的正交群, (dH) 为 $O(m)$ 上的规格化Harr测度.

引理 3⁽¹¹⁾ 设 Y 是 $m \times m$ 对称阵, f 是定义于 $(0, \infty)$ 上实函数, 且

$\sigma = \int_0^\infty f(z)z^{\alpha-1} \cdot dz$, $\alpha = ma + k$, $a > \frac{m-1}{2}$, k 为给定正整数, 则有

$$\int_{X>0} f(\text{tr}X)(\det X)^{\alpha-(m+1)/2} C_\kappa(XY)(dX) = \frac{(a)_\kappa \Gamma_m(a)}{\Gamma(ma+k)} \cdot \sigma \cdot C_\kappa(Y) \quad (5)$$

其中 κ 为 k 的划分, $(a)_\kappa$ 是矩阵变元超越几何级数系数。

3 工具变量法 (IV) 估计量的精确分布

(3) 式可写成

$$(y_1 \ Y_2) = (Z_1 \ Z_2) \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{pmatrix} + (v_1 \ V_2) \quad (6)$$

其中 $Y = (y_1 \ Y_2)$, $Z = (Z_1 \ Z_2)$, $\pi = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{pmatrix}$, $V = (v_1 \ V_2)$, Z_2 为第一个方程 (Z)

式未包含的 K_2 个外生变量的 T 个观测值, $K = K_1 + K_2$ 。

对模型 (1) 设定 (a) $T \geq K = K_1 + K_2$, $K_2 \geq n + 1$;

(b) $\Pi_{22}(K_2 \times n)$ 为列满秩, 因而 (2) 式可识别;

(c) $V \sim LE_{T, n+1}(0, \Sigma, \tilde{g})$, 且有密度函数

$$\text{pdf}(V) = (\det \Sigma)^{-T/2} \tilde{g}[\text{tr}(\Sigma^{-1}V'V)],$$

其中 $\Sigma > 0$, $\tilde{g}(\cdot)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上, 有 Taylor 展式。在此顺便提到 (1)、(2)、

(6) 式系数之间有下列约束:

$$u_1 = v_1 - V_2\beta, \quad \gamma = \Pi_{11} - \Pi_{12}\beta, \quad \text{和} \quad 0 = \Pi_{21} - \Pi_{22}\beta \quad (7)$$

此外, 为了叙述方便不失一般性, 我们不妨假设外生变量满足正规条件 $T^{-1}Z'Z = I_K$, 以 $H = (Z_1' \ Z_3')$ 作为估计 (2) 式中 β, γ 的工具变量, 其中 $Z_3(T \times K_3)$ 为 Z_2 的子矩阵, $K_3 \geq n + 1$ 。则 β 的工具变量 (IV) 估计为

$$\beta_{1V} = (Y_2'Z_3Z_3'Y_2)^{-1}Y_2Z_3Z_3'y_1 \quad (8)$$

现在令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} y_1'Z_3Z_3'y_1 & y_1'Z_3Z_3'Y_2 \\ Y_2'Z_3Z_3'y_1 & Y_2'Z_3Z_3'Y_2 \end{pmatrix} \quad (9)$

则 $\beta_{1V} = A_{22}^{-1}a_{21} \quad (10)$

A 可以写成 $A = (T^{-\frac{1}{2}}Z_3'Y)'(T^{-\frac{1}{2}}Z_3'Y)$ 。

现今 $W = T^{-\frac{1}{2}}Z_3'Y$, 则 W 有密度函数

$$\text{pdf}(W) = (\det \Sigma)^{-K_3/2} g[\text{tr}(W-M)\Sigma^{-1}(W-M)'].$$

其中 $M = E(T^{-\frac{1}{2}}Z_3'Y)$, $g(\cdot)$ 是由 $\tilde{g}(\cdot)$ 导出的实函数。

于是 $A = W'W$, 由定理 1 知 $A \sim GW_{n+1}(K_3, \Sigma, g, \Omega)$, 且有密度函数

$$\text{pdf}(A) = \frac{\pi^{K_3(n+1)/2}}{\Gamma_{n+1}\left(\frac{K_3}{2}\right)} (\det \Sigma)^{-K_3/2} (\det A)^{(K_3-n-2)/2} \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(2k)} [\text{tr}(\Sigma^{-1}A + \Omega)] \cdot \sum_{\kappa} \frac{1}{\binom{K_3}{2}_{\kappa}} C_{\kappa}(\Omega \Sigma^{-1}A), \quad A > 0 \quad (11)$$

其中 $\Omega = \Sigma^{-1}M'M$.

由于 Z_3 是 Z_2 的子矩阵, 可设 $Z_3 = Z_2 S$, 则

$$M = E(T^{-\frac{1}{2}} Z_3' Y) = T^{-\frac{1}{2}} Z_3' Z \Pi = T^{-\frac{1}{2}} S' Z_2'(Z_1, Z_2) \Pi \\ = T^{-\frac{1}{2}} (0 \ S') \Pi = T^{-\frac{1}{2}} S' (\Pi_{21} \ \Pi_{22}) = T^{-\frac{1}{2}} S' \Pi_{22} (\beta \ I_n).$$

最后一等式根据约束条件(6)得出. 则

$$\Omega \Sigma^{-1}A = \Sigma^{-1}M'M \Sigma^{-1}A = T \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \beta' \\ I_n \end{pmatrix} \Pi_{22}' SS' \Pi_{22} (\beta \ I_n) \Sigma^{-1}A.$$

令
$$P = T \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \beta' \\ I_n \end{pmatrix} \Pi_{22}' SS' \Pi_{22} (\beta \ I_n) \Sigma^{-1},$$

而 $\Pi_{22}' SS' \Pi_{22}$ 为 $n \times n$ 正定阵, 故 $\Pi_{22}' SS' \Pi_{22} = \tilde{\Pi}_{22}' \tilde{\Pi}_{22}$,

其中 $\tilde{\Pi}_{22}$ 为 $n \times n$ 非奇矩阵, 令

$$Q = \tilde{\Pi}_{22} (\beta \ I_n) \Sigma^{-1} T^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

则
$$P = Q'Q$$

Q 为 $n \times (n+1)$ 行满秩矩阵.

令 $Q = (\theta \ \Delta)$, 其中 θ 为 $n \times 1$, Δ 为 $n \times n$. 则 $\Omega \Sigma^{-1}A = \begin{pmatrix} \theta' \\ \Delta' \end{pmatrix} (\theta \ \Delta) A$ 的非

零特征根同 $(\theta \ \Delta) A \begin{pmatrix} \theta' \\ \Delta' \end{pmatrix}$ 的非零特征根.

又令 $\delta = \text{tr} \Omega$.

则
$$\text{pdf}(A) = \frac{\pi^{K_3(n+1)/2}}{\Gamma_{n+1}\left(\frac{K_3}{2}\right)} \cdot \det \Sigma^{-K_3/2} \det A^{(K_3-n-2)/2} \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(2k)} [\text{tr}(\Sigma^{-1}A) + \delta] \cdot \sum_{\kappa} \frac{1}{\binom{K_3}{2}_{\kappa}} C_{\kappa} \left[(\theta \ \Delta) A \begin{pmatrix} \theta' \\ \Delta' \end{pmatrix} \right]. \quad A > 0$$

我们作变换 $\omega = a_{11} - a_{12} A_{22}^{-1} a_{21}$, $r = A_{22}^{-1} a_{21}$, $A_{22} = A_{22}$,

由(12)可知 r 就是 β_{iv} . 这变换的Jacobi行列式是 $|J| = \det A_{22}$, 则

$$\text{tr}(\Sigma^{-1}A) = \sigma^{11} \omega + \text{tr}[\sigma^{11} r r' + r \sigma^{12} + \sigma^{21} r' + \Sigma^{22}) A_{22}]$$

$$C_{\lambda}[(\theta \ \Delta)A \begin{pmatrix} \theta' \\ \Delta' \end{pmatrix}] = C_{\kappa}[\omega\theta\theta' + (\Delta + \theta r')A_{22}(\Delta' + r\theta')]$$

其中
$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \Sigma^{22} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} \text{pdf}(\omega, r, A_{22}) &= \frac{\pi^{K_3(n+1)/2}}{\Gamma_{n+1}\left(\frac{K_3}{2}\right)} (\det \Sigma)^{-K_3/2} \cdot \omega^{(K_3-n-2)/2} (\det A_{22})^{(K_3-n)/2} \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(2k)} \{ \delta + \sigma^{11}\omega + \text{tr}[(\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})A_{22}] \} \\ &\quad \cdot \sum_{\kappa} \frac{1}{\left(\frac{K_3}{2}\right)_{\kappa}} C_{\kappa}(\omega\theta\theta' + (\Delta + \theta r')A_{22}(\Delta' + r\theta')) \end{aligned} \quad (13)$$

再作变换 $\omega = \omega, \quad r = r,$

$$B = (\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})^{1/2} A_{22}(\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})^{1/2}$$

其变换的 Jacobi 行列式为

$$|J| = \det(\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})^{-(n+1)/2}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \text{pdf}(\omega, r, B) &= \frac{\pi^{K_3(n+1)/2}}{\Gamma_{n+1}\left(\frac{K_3}{2}\right)} \cdot (\det \Sigma)^{-K_3/2} \det(\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})^{-(K_3+1)/2} \\ &\quad \cdot (\det B)^{(K_3-n)/2} \cdot \omega^{(K_3-n-2)/2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(2k)} [\sigma^{11}\omega + \delta + \text{tr}B] \cdot \sum_{\kappa} \frac{1}{\left(\frac{K_3}{2}\right)_{\kappa}} \\ &\quad \cdot C_{\kappa}[\omega\theta\theta' + (\Delta + \theta r')(\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})^{-\frac{1}{2}} B(\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \\ &\quad + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})^{-\frac{1}{2}} \cdot (\Delta + \theta r')'] \end{aligned} \quad (14)$$

为了简化表达式, 引入下述记号

$$C = \frac{\pi^{K_3(n+1)/2}}{\Gamma_{n+1}\left(\frac{K_3}{2}\right)} \det \Sigma^{-K_3/2}$$

$$E = \theta\theta' \quad (15)$$

$$F(r) = (\Delta + \theta r')(\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})^{-\frac{1}{2}}$$

$$h_k(\text{tr}B, \omega) = g^{(2k)}(\sigma^{11}\omega + \delta + \text{tr}B)$$

则
$$\text{pdf}(\omega, r, B) = C \cdot \det(\sigma^{11}rr' + r\sigma^{12} + \sigma^{21}r' + \Sigma^{22})^{-(K_3+1)/2}$$

$$\cdot \omega^{(K_3-n-2)/2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{1}{k! \left(\frac{K_3}{2}\right)_{\kappa}} \det B^{(K_3-n)/2}.$$

$$\cdot h_k(\text{tr}B, \omega) C_{\kappa}(\omega E + F(r)BF(r)') \tag{16}$$

由引理 1 之(i)知

$$C_{\kappa}(\omega E + F(r)BF(r)') = \sum_{\tau, \lambda (\kappa \in \tau \cdot \lambda)} \binom{k}{s} \theta_{\kappa}^{\tau, \lambda} C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)BF(r)', \omega E),$$

其中 $k = s + l$, $s \geq 0$, $l \geq 0$, τ 为 s 的划分, λ 为 l 的划分。这样(16)式变为

$$\begin{aligned} \text{pdf}(\omega, r, B) &= C \cdot \det(\sigma^{11} r r' + r \sigma^{12} + \sigma^{21} r' + \Sigma^{22})^{-(K_3+1)/2} \cdot \omega^{(K_3-n-2)/2} \\ &\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \sum_{\tau, \lambda (\kappa \in \tau \cdot \lambda)} \frac{1}{k! \binom{K_3}{2}_{\kappa}} \binom{k}{s} \theta_{\kappa}^{\tau, \lambda} h_k(\text{tr}B, \omega) \det B^{(K_3-n)/2} \\ &\cdot C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)BF(r)', \omega E) \end{aligned} \tag{17}$$

记 $f(F(r), E) = \int_{B>0} h_k(\text{tr}B, \omega) \det B^{(K_3-n)/2} C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)BF(r)', \omega E) (dB)$,

对任一 $H \in O(n)$, 并利用 $(dB) = (dH'BH)$, 有

$$\begin{aligned} f(F(r)H', E) &= \int_{B>0} h_k(\text{tr}B, \omega) \det B^{(K_3-n)/2} C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)H'BHF(r)', \omega E) (dB) \\ &= \int_{H'BH>0} h_k(\text{tr}H'BH, \omega) \det(H'BH)^{(K_3-n)/2} C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)H'BHF(r)', \omega E) (dH'BH) \\ &= f(F(r), E). \end{aligned}$$

于是对 $f(F(r), E)$ 在 $O(n)$ 上平均, 并利用引理 1, 2, 3 就有

$$f(F(r), E) = \int_{O(n)} f(F(r), E) (dH) = \int_{O(n)} f(F(r)H', E) (dH)$$

$$= \int_{O(n)} \int_{B>0} h_k(\text{tr}B, \omega) \det B^{(K_3-n)/2} C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)H'BHF(r)', \omega E) (dB) (dH)$$

引理 1 $= \int_{B>0} h_k(\text{tr}B, \omega) \det B^{(K_3-n)/2} \int_{O(n)} \omega^l C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)H'BHF(r)', E) (dH) (dB)$

引理 2 $= \frac{C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)F(r)', E) \omega^l}{C_{\tau}(I)} \int_{B>0} h_k(\text{tr}B, \omega) \det B^{(K_3-n)/2} C_{\tau}(B) (dB)$

引理 3 $= \frac{C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)F(r)', E) \omega^l}{C_{\tau}(I)} \cdot \frac{\left(\frac{K_3+1}{2}\right)_{\tau} \Gamma_n\left(\frac{K_3+1}{2}\right) C_{\tau}(I)}{\Gamma\left(\frac{n(K_3+1)}{2} + s\right)}$

$$\cdot \int_0^{\infty} h_k(t, \omega) t^{\frac{n(K_3+1)}{2} + s - 1} dt \tag{18}$$

现将 (17) 式关于 $B>0$ 和 $\omega>0$ 积分, 并利用 (18) 式可得出 r 的密度函数

$$\text{pdf}(r) = \int_{\omega>0} \int_{B>0} \text{pdf}(\omega, r, B) (dB) d\omega$$

$$= C \det(\sigma^{11} r r' + r \sigma^{12} + \sigma^{21} r' + \Sigma^{22})^{-(K_3+1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \sum_{\tau, \lambda} (\kappa \in \tau, \lambda)$$

$$\frac{\binom{k}{s}}{k! (K_3/2)_{\kappa}} \cdot \theta_{\kappa}^{\tau, \lambda} \cdot \frac{\left(\frac{K_3+1}{2}\right)_{\tau} \Gamma_n\left(\frac{K_3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n(K_3+1)}{2} + s\right)} \cdot d_{k, f, l} \cdot C_{\kappa}^{\tau, \lambda}(F(r)F(r)', E) \quad (19)$$

其中

$$d_{k, f, l} = \int_0^{\infty} \omega^{\frac{K_3-n-2}{2} + l} \int_0^{\infty} g^{(2k)}(t + \sigma^{11}\omega + \delta) \cdot t^{\frac{n(K_3+1)}{2} + s - 1} dt d\omega$$

利用〔13〕中定理 2.1, 经计算可得

$$d_{k, f, l} = (\sigma^{11})^{-\left(\frac{K_3-n}{2} + l\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n(K_3+1)}{2} + s\right) \Gamma\left(\frac{K_3-n}{2} + l\right)}{\Gamma\left(\frac{K_3(n+1)}{2} + k\right)}$$

$$\cdot \int_0^{\infty} g^{(2k)}(z + \delta) z^{\frac{K_3(n+1)}{2} + k - 1} dz.$$

最后得到内生变量系数工具变量法估计量 $\beta_{IV} = r$ 的密度为

$$\text{pdf}(r) = \frac{\pi^{K_3(n+1)/2}}{\Gamma_{n+1}\left(\frac{K_3}{2}\right)} \cdot \Gamma_n\left(\frac{K_3+1}{2}\right) \det \Sigma^{-K_3/2} \det[(r I_n) \Sigma^{-1} (r I_n)']^{-(K_3+1)/2}$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\tau} \sum_{\lambda} \sum_{\phi \in \tau, \lambda} \frac{(\sigma^{11})^{-\frac{K_3-n}{2} - l} \theta_{\phi}^{\tau, \lambda}}{s! l! \left(\frac{K_3}{2}\right)_{\phi}} \cdot \frac{\left(\frac{K_3+1}{2}\right)_{\tau} \Gamma\left(\frac{K_3-n}{2} + l\right)}{\Gamma\left(\frac{K_3(n+1)}{2} + s + l\right)}$$

$$\cdot \left(\int_0^{\infty} g^{(2k)}(z + \delta) z^{\frac{K_3(n+1)}{2} + s + l - 1} dz \right)$$

$$\cdot C_{\phi}^{\tau, \lambda}[(\Delta + \theta r')[(r I_n) \Sigma^{-1} (r I_n)']^{-1} (\Delta' + r \theta'), \theta \theta'] \quad (20)$$

其中 $Q = (\theta \ \Delta)$ 是包含了真实参数 β , Q 与 β 的关系由 (12) 式给出。

4 正态情况

上述 β_{IV} 的密度函数 (19) 式是在设定扰动项属第三类椭圆等高分布族的总体时导出的, 并得到了在 $\Sigma \neq I$ 时的一般结果。文〔5〕中 β_{IV} 的密度函数是在设定扰动项属正态总体时导出的。本文对文〔5〕中 (6) 式内的 ${}_0F_1$ 表示成逆拉普拉斯变换的形式, 然后对 ω, B 积分, 再求出其拉普拉斯变换而得到 $\text{pdf}(r)$ 。而在本文情况下, $g(\cdot)$ 的具体形式没有给出, 无法获得相应函数的逆拉普拉斯变换。我们利用了带状多项式的二项展开式完成了积分计算。我们也直接利用本文方法以及在 (19) 式中 $g(\cdot)$ 用指数函数代入, 又令 $\Sigma = I$, 都获得了与文〔5〕中 (B_3) 的结果

$$\begin{aligned}
 \text{pdf}(r) = & \text{etr} \left[-\frac{T}{2} (I + \beta\beta') \tilde{\Pi}_{22}' \tilde{\Pi}_{22} \right] \Gamma_n \left(\frac{L+n+1}{2} \right) \left[H^{n/2} \det(I + rr')^{(L+n+1)/2} \right]^{-1} \\
 & \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\tau} \sum_{\lambda} \sum_{\phi \in \tau, \lambda} \frac{\left(\frac{L}{2} \right)_s \left(\frac{L+n+1}{2} \right)_l \theta^{\tau, \lambda}}{s! l! \Gamma_n \left(\frac{l+s}{2}, \phi \right)} C_{\phi}^{\tau, \lambda} \left(\frac{T}{2} \tilde{\Pi}_{22} \beta\beta' \tilde{\Pi}_{22}, \frac{T}{2} \tilde{\Pi}_{22} \right) \\
 & \cdot (I + \beta r') (I + rr')^{-1} (I + r\beta') \tilde{\Pi}_{22}' \quad (21)
 \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] Phillips, P. C. B., Exact small sample theory in the simultaneous equations model, *Handbook of Econometrics*, Chpt. 8. ed. Z. Griliches and M. D. Intriligator, North-Holland Publishing Company, 1983.
- [2] Richardson, D. H., *JASA*, 63 (1968), 1214—1226.
- [3] Sawa, T., *JASA*, 64 (1969) 923—936.
- [4] 方开泰, 数学进展, 6, (1987), 1, 1—16.
- [5] Phillips, P. C. B. *Econometrica* 48(1980) 861—878.
- [6] Constantine, A. G., *Ann. Math. Statist* 34(1963)1270—1285.
- [7] Davis, A. W., *Ann. Inst. Statist. Math.*, 31(1979), part A, 469-485.
- [8] Davis, A. W., Invariant polynomials with two matrix arguments, extending zonal polynomials, in *Multivariate Analysis-V* (P. R. Krishnaiah ed.), North-Holland Publishing Company (1980), 287-299.
- [9] James A. T. *Ann. Math.* 74(1961) 456—469.
- [10] Muirhead, R. J., *Aspect of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley and Sons, Inc., 1982.
- [11] 滕成业、方宏彬、邓炜材, 广义非中心Wishart分布, 中山大学高等学术研究中心 ZARC, 87—72(M).
- [12] Teng Cheng-Ye and Fang Hong-Bing., The generalized noncentral Wishart distribution, *SINO-American Statistical Meeting Contributed papers*, 1987, 417—419.
- [13] 张光庭、方开泰, 多元统计分析引论, 科学出版社, 1982.

THE Exact Distribution of Instrumental Variable
(IV) Estimators of Endogenous Variable Parameters
with a Certain Kind of Non-Normal Disturbance
in the Simultaneous Equations

Teng Chengye Chen Jiwen

Abstract

We derive the exact distribution of the instrumental variable (IV) estimators of the parameters of endogenous variables with the disturbance being the third kind of elliptically contoured distribution in the simultaneous equations, generalized the result of Phillips (1980).

Keyword elliptically contoured distribution, IV estimators, zonal polynomials

· 简讯 ·

样条函数理论及其应用

中山大学计算机科学系计算数学研究室, 在李岳生教授领导下, 十多年来, 对样条函数开展了系统的理论研究和应用研究工作, 取得了一系列重要成果。他们把样条函数与 δ 函数联系起来, 用广义函数与变分法的观点发现了多边值问题与样条函数的联系, 展开数学物理不适应问题与样条函数关系的研究, 探讨多元散乱数据拟合的变分原理, 写成《样条函数方法》、《样条与插值》、《曲线曲面的数值表示与逼近》与《数值逼近》等五部专著, 发表论文数十篇。并先后获得全国科学大会奖和广东省科学大会奖、广东省高教局科技成果二等奖、广东省高校科技进步奖二等奖及广东省科协一等奖。