中山大学学报
1988年第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI №. 4, 1988

横向多普勒效应与广义相对论

郑庆璋
（物理学系）

摘　要

从广义相对性原理和等效原理所导出的普遍公式出发，分析有关检验横向多普勒效应的转盘实验，除了能说明那些简单的实验外，对一些较为复杂的问题也能给出较完满的广义相对论解答，从而进一步肯定了广义相对论的普遍意义。

关键词　横向多普勒效应，广义相对论

1　引言

横向多普勒效应纯粹是相对论效应。除了诸如"运动原子对激光的饱和吸收"等少数几个实验外，直接验证它的实验基本上都是转动圆盘（转子）上的穆斯堡尔效应实验[1-3]。由于光源在每一瞬时速度的变化可以忽略，这相当于存在一个局部的惯性系，因此可以用狭义相对论来把它作为横向多普勒效应处理。特别是在一些简单的情况，接收器又同步地随着光源而改变它的位置，使它们之间总是保持着横向运动的关系，就更使人觉得它只不过是一个狭义相对论的问题。

然而从本质上讲，这里牵涉到一个传动坐标系的问题，因此是属于广义相对论普遍处理的问题。事实上也曾有人[1,4,5]用广义相对论的观点来解释这些实验，但他们只从等效原理指出由于转动而存在一个等效的引力势，以致出现引力红移。由于这些分析没有涉及广义相对论另一基本原理——广义相对性（或广义协变）原理，因而是不完全的，特别是对一些稍为复杂一点的问题，象Dos Santos所提出的那样似是而非的问题[6]，就未能给出广义相对论的回答。

Dos Santos提出，把γ射线源和吸收体分别安置在两个相同的转子上，令两转子的转动使源和吸收体具有大小相等、方向相反的速度。他认为按照洛伦兹的理论，相对于绝对静止的以太，两者的速度大小一样，应当不存在横向多普勒效应（横向多普勒效应与速度的方向无关）。然而，按照狭义相对论，则由于有相对运动存在，因而应当有横向多普勒效应存在。Dos Santos断言，利用这个实验可以检验狭义相对论和洛伦兹理

本文1988年1月14日收到

论的是非。但是实际上Dos Santos的见解是不对的，正如张元仲所指出的[5]，在此情况下按照狭义相对论，源的运动方向不再与γ射线的方向正交，即不再是纯粹的横向效应，容易证明，此情况下总的多普勒效应还是等于零，与洛伦兹理论的推断一致。

本文从广义相对论关于光谱频移的普遍理论出发，通过坐标变换获得转动系中的度规表式，不但能够解释已有的简单转动频移（横向多普勒效应）实验，而且也能从广义相对论的理论证明Dos Santos实验方案的频移效应确实为零，从而进一步阐明广义相对论的普遍意义。

2　广义相对论的频移效应公式

为了下面分析讨论的需要，我们首先介绍广义相对论的频移效应——多普勒效应公式。

设光源位于$P_1(x_1^\alpha)$处($\alpha=0,1.2,3$)，并按$x_1^\alpha=x_1^\alpha(t)$运动；接收器位于$P_2(x_2^\mu)$处（$\mu=0,1,2,3$），并按$x_2^\mu=x_2^\mu(t)$运动，其中t为坐标时。假定光源P_1在t_1时刻开始发射电磁波，于固有时间间隔$\delta\tau_1$内发出δN个波，此期间所经历的坐标时为δt_1。接收器在t_2时刻开始接收到这列电磁波，并于固有时间间隔$\delta\tau_2$内接收完这δN个波长，此期间所经历的坐标时为δt_2。换句话说，光源发射的频率ν_s和接收器接收到的频率ν_a按定义分别为

$$\nu_s=\frac{\delta N}{\delta\tau_1},\qquad \nu_a=\frac{\delta N}{\delta\tau_2}\tag{1}$$

而光源发射的波长λ_s和接收器接收到的波长λ_a则分别为

$$\lambda_s=\frac{c}{\nu_s}=\frac{c\delta\tau_1}{\delta N},\qquad \lambda_a=\frac{c}{\nu_a}=\frac{c\delta\tau_2}{\delta N}\tag{2}$$

其中c为局部惯性系中测量的真空光速。

若我们所考虑的四维时空间隔ds和固有时间隔$d\tau$由

$$ds^2=-c^2d\tau^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\tag{3}$$

确定，其中$g_{\mu\nu}$为时空度规张量，则由此可以导出广义相对论的频移效应——多普勒效应公式为

$$\begin{aligned}\frac{\lambda+\delta\lambda}{\lambda}&=\frac{\lambda_a}{\lambda_s}=\frac{\nu_s}{\nu_a}=\frac{\delta\tau_2}{\delta\tau_1}\\&=\frac{[-g_{\mu\nu}\delta x^\mu\delta x^\nu]_{P_2}^{1/2}}{[-g_{\alpha\beta}\delta x^\alpha\delta x^\beta]_{P_1}^{1/2}}=\frac{[-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]_{P_2}^{1/2}}{[-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta]_{P_1}^{1/2}}\cdot\frac{\delta t_2}{\delta t_1}\end{aligned}\tag{4}$$

其中$\dot{x}^\mu=\frac{dx^\mu}{dt}$，$\dot{x}^\alpha=\frac{dx^\alpha}{dt}$等为接收器和光源运动的经典坐标速度。（4）式即为著名的Weyl公式，它最早为H.Weyl所导出[7]。

由（4）式可见，为要确定电磁辐射的频移，除了必须知道时空度规$g_{\mu\nu}$和光源以及接收器的坐标速度$\dot{x}^\alpha(\dot{x}^\beta)$和$\dot{x}^\mu(\dot{x}^\nu)$外，还必须知道$\delta t_1$和$\delta t_2$的关系。这后一关系可以这样考虑求出：接收器接收到光波的时刻t_2由光源开始发射光波的时刻t_1以及光传播的规律决定，即t_2是t_1的函数，这个函数一般可由光的传播规律——零短程线方程求解获得。

但对于一些简单的特殊情况，有时也可由解零间隔方程求得。

3　横向多普勒效应的广义相对论解释

利用穆斯堡尔效应验证横向多普勒效应的典型实验[1,2]，是在一个高速旋转的转子中，离轴 r_1 处放置 γ 射线源（光源），而在同一直径另一端离轴 r_2 处放置吸收体（接收器），其位置关系如图1所示。图中OXYZ代表惯性坐标系，而oxyz则为与转子固联的转动坐标系，它以匀角速度 ω 绕公共的Z（z）轴（图中没有画出）转动。在惯性系OXYZ中，若用坐标时T和柱坐标（R，Θ，Z），则时空线元公式为

$$ds^2 = -c^2dT^2 + dR^2 + R^2d\Theta^2 + dZ^2 \tag{5}$$

对于平面问题，恒有 $dZ=0$，(5)式中的最后一项自然可以略去。

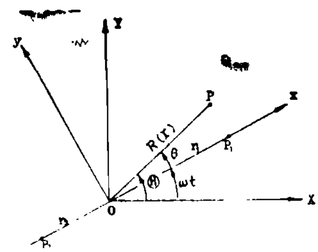

图1　光源和接收器在转子中的位置示意图

Fig.1　A positional scheme of source and absorber on rotator

现在我们在转动坐标系oxyz中来描述这个问题，采用坐标时 t 和柱坐标(r,θ,z)，作变换

$$T=t,\quad R=r,\quad \Theta=\theta+\omega t,\quad Z=z \tag{6}$$

则有

$$dT=dt,\quad dR=dr,\quad d\Theta=d\theta+\omega dt,\quad dZ=dz \tag{7}$$

代入(5)式化简后得

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2\right)dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + 2r^2\omega dt\,d\theta + dz^2 \tag{8}$$

(8)式便是转动坐标系中的时空线元公式。

对于目前的情况，这是一个平面问题，恒有 $dz=0$，又光源 P_1 和接收器 P_2 都静止于oxyz系，因而有 $\frac{dr_1}{dt}=\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{dr_2}{dt}=\frac{d\theta_2}{dt}=0$。另一方面，$\gamma$ 射线从 P_1 沿 x 轴传到 P_2，整个过程中 $d\theta=0$，于是由(8)式及光沿 $ds=0$ 线传播可得 γ 线的传播方程

$$0 = -c^2\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2\right)dt^2 + dr^2$$

由此可得

$$dt = \pm\frac{dr}{c\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2}} \tag{9}$$

式中±号的取舍视光传播时 r 增加还是减少而定（r 增加时取+号，r 减小时取−号）。从 r_1 和 t_1 积分(9)式至 r_2 和 t_2，注意到±号的意义，得

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{\omega}\left(\arcsin\frac{\omega r_1}{c} + \arcsin\frac{\omega r_2}{c}\right) \tag{10}$$

由此可以求得

$$\delta t_2 = \delta t_1 + \frac{1}{c}\left(\frac{\delta r_1}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}r_1^2}} + \frac{\delta r_2}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}r_2^2}}\right) \tag{11}$$

由于在 γ 射线发射和吸收过程中，光源 P_1 和接收器 P_2 都没有移动，因而有 $\delta r_1=\delta r_2=0$，

故由(11)式可得$\delta t_2=\delta t_1$。把有关结果和(8)式代入(4)式中，注意到$\omega r\ll c$，得

$$\frac{\lambda+\delta\lambda}{\lambda}=\frac{[-g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}]_{p_2}^{1/2}}{[-g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}]_{p_1}^{1/2}}\cdot\frac{\delta t_2}{\delta t_1}$$

$$=\frac{[c^2(1-\frac{\omega^2}{c^2}r_2^2)]^{1/2}}{[c_2(1-\frac{\omega^2}{c^2}r_1^2)]^{1/2}}\cdot\frac{\delta t_1}{\delta t_1}\simeq 1+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}(r_1^2-r_2^2) \tag{12}$$

这和H.J.Hay等人的结果一致[1,2]。

4 广义相对论对Dos Santos实验方案的分析

Dos Santos提出检验洛伦兹理论和狭义相对论是非的实验方案有二[6]。一是两个半径同为r_0的转子，绕同一轴以相反方向的匀角速度ω转动，光源P_1和接收器P_2分别置于两转子边缘的相应位置上，使它们彼此能在某一瞬时落在同一垂线上并具有大小相同、方向相反的速度（图2）。另一方案是两个同样的转子处于同一平面上，绕相距为L的两轴以相同的匀角速度ω转动。光源P_1和接收器P_2分别置于两转子的边缘上，并使它们在某一瞬时能落在两圆心的联线上，且有大小相等、方向相反的速度（图3）。我们仍然采用上节的坐标符号，在与接收器P_2固联的转动坐标系$oxyz$上，线元公式仍由（8）式表示。下面我们就两个方案分别讨论：

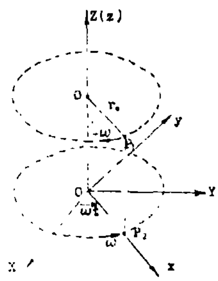

图2 Dos Santos实验方案之一示意图。图示当P_1,P_2落在同一垂线上时的情形。

Fig.2 One scheme of Dos Santos' experiment.
The figure shows the moment at which P_1 and P_2 lay on the same vertical line

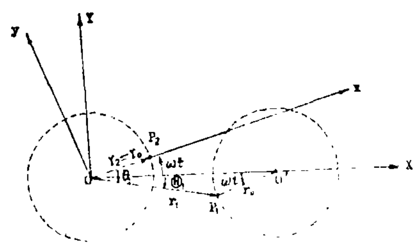

图3 Dos Santos实验方案之二示意图。由图易见，当$\omega t=2n\pi(n=0,1,2,\cdots)$时，$P_1$,$P_2$落在$\overline{OO'}$联线上，且有大小相等、方向相反的速度。

Fig.3 Another scheme of Dos Santos' experiment.
From the figure we can see that P_1 and P_2 lay on the line $\overline{OO'}$, have velocities of the same magnitude but opposite directions, when $\omega t=2n\pi$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$

（1）对于图2所示的瞬时情况，显然有

$$r_1=r_0,\quad \theta_1=\Theta_1-\omega t=0,\quad z=l,\quad \frac{dr_1}{dt}=0,\ \frac{d\theta_1}{dt}=-2\omega,\ \frac{dz_1}{dt}=0;$$

$$r_2=r_0,\ \theta_2=z_2=0,\ \frac{dr_2}{dt}=\frac{d\theta_2}{dt}=\frac{dz_2}{dt}=0. \tag{13}$$

另一方面，光（γ射线）沿$\overline{P_1P_2}$传播，有$r=r_0$，$\theta=0$以及$dr=d\theta=0$；于是由(8)式及光沿零间隔线传播的要求得

$$-c^2(1-\frac{\omega^2}{c^2}r_0^2)dt^2+dz^2=0$$

解得

$$dt=-dz/c\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}r_0^2} \tag{14}$$

上式取负号是因为光沿z减小的方向传播。对(14)式从z_1和t_1积分至z_2和t_2，得

$$t_2=t_1+\frac{1}{c}(1-\frac{\omega_2}{c^2}r_0^2)^{-\frac{1}{2}}(z_1-z_2) \tag{15}$$

注意到在γ射线发射和接收过程中$dz_1=dz_2=0$，故由(15)式可得$\delta t_2=\delta t_1$。

把上述有关结果代入(4)式中，得

$$\frac{\lambda+\delta\lambda}{\lambda}=\frac{[-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu]_{p_2}^{1/2}}{[-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta]_{p_1}^{1/2}}\cdot\frac{\delta t_2}{\delta t_1}$$

$$=\frac{[c^2(1-\frac{\omega^2}{c^2}r_0^2)]^{1/2}}{[c^2(1-\frac{\omega^2}{c^2}r_0)^2-r_0^2(-2\omega)^2-2r_0^2\omega(-2\omega)]^{1/2}}\cdot\frac{\delta t_1}{\delta t_1}=1$$

即Dos Santos的实验方案一不存在相对论频移效应。

(2) 图3所示的情况属于平面问题，恒有$dz=0$。在$\omega t=2n\pi(n=0,1,2,\cdots)$瞬时，易见有

$$\left.\begin{aligned}&r_1=L-r_0,\quad r_1d\Theta_1=-r_0d(\omega t);\\&\frac{dr_1}{dt}=0,\ \frac{d\theta_1}{dt}=\frac{d\Theta_1}{dt}-\omega=-(\frac{r_0}{r_1}+1)\omega\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

以及

$$r_2=r_0,\ \theta_2=0;\ \frac{dr_2}{dt}=\frac{d\theta_2}{dt}=0. \tag{17}$$

此外，在该瞬时P_1发射出的γ射线沿x轴的反方向传播，即有$d\theta=0,dr<0$，于是由$ds=0$及(8)式得光的传播方程为

$$-c^2(1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2)dt^2+dr^2=0$$

解得

$$dt=-dr/c\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2} \tag{18}$$

上式从r_1和t_1积分至r_2和t_2，得

$$t_2=t_1+\frac{1}{\omega}(\arcsin\frac{\omega r_1}{c}-\arcsin\frac{\omega r_2}{c}) \tag{19}$$

注意到$\delta r_1 = \frac{dr_1}{dt}\delta t_1 = 0$ 及$\delta r_2 = \frac{dr_2}{dt}\delta t_2 = 0$,由上式可得

$$\delta t_2 = \delta t_1 + \frac{1}{c}\left(\frac{\delta r_1}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}r_1^2}} - \frac{\delta r_2}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}r_2^2}}\right) = \delta t_1$$

把有关结果代入(4)式，得

$$\frac{\lambda+\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\left[c^2\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}r_0^2\right)\right]^{1/2}}{\left[c^2\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}r_1^2\right) - r_1^2\left(\frac{r_0}{r_1}+1\right)^2\omega^2 + 2r_1^2\omega\left(\frac{r_0}{r_1}+1\right)\omega\right]^{1/2}} \cdot \frac{\delta t_1}{\delta t_1} = 1$$

可见Dos Santos的第二个实验方案仍然不存在相对论频移效应！

总之，Dos Santos所提出的两个实验方案，从广义相对论的普遍分析可见，相对论和洛伦兹理论都有相同的结论——不存在频移效应！换句话说，也就是它们不能对理论提供正误的判据。

5 结 论

(1) 由上面的讨论可见，利用转子所作的横向多普勒效应实验检验，牵涉到转动坐标系的问题，因而实质上是广义相对论的问题。正确利用广义相对论的基本理论，不但能说明简单的横向多普勒效应，而且对一些稍稍复杂一点的实验方案，也能作出正确的理论分析。

(2) 对于一些简单的情况，只从等效原理引入一个等效的引力势，便能说明转子实验中的横向多普勒效应。然而，正如(12)式所显示的结果那样，仅当$\omega r \ll c$时,这样简化处理才能有效，一般应该引用由广义相对论的基本原理——广义相对性原理和等效原理结合导出的(4)式才是正确的。有时只简单地引用等效原理可能会导致谬误，正如早期爱因斯坦在导出光线在引力场中偏折公式时所出现的错误那样[8]。

(3) 广义相对论是具有普遍意义的理论。它的频移效应（多普勒效应）公式——(4)式是极其普遍的公式，它不但包括了引力效应，而且也包括了坐标系和光源以及接收器的运动效应在内，问题在于如何正确运用(4)式。本文只讨论了几个不很复杂的例子，目的在于通过它们进一步肯定广义相对论的普遍意义和(4)式的具体应用，以期对这方面的欠缺作一些补充。

参 考 文 献

〔1〕H. J. Hay etal., *Phys. Rev. Lett*, 4(1960), 165.
〔2〕W. Kündig, *Phys. Rev.*, 129(1963), 2371.
〔3〕D.C.Champeney etal., *Proc. Phys. Soc.*, 77(1961), 350; *Nature*, 198(1963), 1186; *Proc. Phys. Soc.*, 85(1965), 583.
〔4〕W. Pauli, *Theory of Relativity* (Pergamon Press, 1958), 19, 151.
〔5〕张元仲，狭义相对论实验基础，科学出版社，1979年，北京，§3.2.

〔6〕 A.D.Dos Santos, *Nuovo Cimento*, 32B(1976), 519.
〔7〕 H.Weyl, *Phys. Zeitsch.*,24(1923), 230.
〔8〕 爱因斯坦，《爱因斯坦文集》第二卷(范岱年等编译，商务，1977年北京)，212.

The Transverse Doppler Effect and General Relativity

Zheng Qingzhang

Abstract

Most experiments which test the transverse Doppler effect use the Mössbauer effect on a rotating dish—rotator. Because they are related to a rotational coordinate system, they can be analysed in view of either special or general relativity. However, the former analyses in general relativity often simply use the principle of equivalence and thus can only explain the relative simple experiments. For more complex problems, it is difficult to explain perfectly if only the principle of equivalence is used. In this paper, we start from the general formula which was deduced by the fundamental principles of general relativity theory—the general relativity principle and the principle of equivalence, and use it to analyse the rotating dish experiment which tests the transverse Doppler effect. The formula can illustrate not only the simple experiments, but also the relative complex problems, and gives a better answer in general relativity theory. Thus, we affirm that the general relativity theory is of universal significance.

Keywords transverse Doppler effect, general relativity