1987年第2期 中山大学学报 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI No. 2, 1987

# 关于单纯同伦算法的数值实施

陈泽鹏

（计算机科学系）

**摘 要**

单纯同伦算法是寻求欧氏空间中集值映射的Kakutani不动点的方法。本文主要是对Eaves-Saigal方法的数值实施进行讨论，并提出了实现这个方法的有效算法。

**关键词** 集值映射，单纯部分，标号矩阵

采用向量标号法计算上半连续集值映射$F: R^n \to P(R^n)$的不动点问题，Merrill的重复开始算法和Eaves-Saigal的单纯同伦算法，都是较为成功的有效方法。本文提出从某个特殊的初始单纯形出发，再利用Gauss-Jordan型初等矩阵，就能简单地实现单纯形的取主转移运算，使算法实现非常方便。

本文的记号同文〔1〕，我们将集中讨论单纯同伦算法，先简单回顾一下Eaves-Saigal的算法过程。

我们的目的是计算上半连续集值映射$F: R^n \to P(R^n)$的不动点。取$T$为$(0,1] \times R^n$的一个渐细单纯剖分，使得$T^0 \subset \cup_{m=0}^{\infty}\left\{2^{-m}\right\} \times R^n$，记$P:(0,1] \times R^n \to R^n$为投射，$P(t,x)=x$。设$T$符合条件：对于每个单纯形$\sigma \in T$，有非负整数$m$使得$\sigma \subset (2^{-(m+1)}, 2^{-m}) \times R^n$，而只要$\sigma \subset (2^{-(m+1)}, 2^{-m}) \times R^n$，就有$\sigma$的投影直径$diam_P \sigma \leqslant \sqrt{n}\, h 2^{-m}$，这里$h>0$预先取定。例如，若用同一字母$h$记由$h(t,x)=(t,hx)$确定的伸缩映射$h:(0,1] \times R^n \to (0,1] \times R^n$，则按

$$hJ_3 = \{h(\sigma) \mid \sigma \in J_3\}$$

定义的$hJ_3$单纯剖分，就是$(0,1] \times R^n$的符合上述要求的渐细单纯剖分。

取定一点$c \in R^n$，使$(1,c)$位于$n+1$维渐细单纯剖分$T$的位于$\{1\} \times R^n$的一个$n$维界面内部。

定义$\phi:(0,1] \times R^n \to R^n$如下：设$(t,x) \in T^0$是渐细单纯剖分$T$的一个顶点，则$\phi(1,x)=c$；$\phi(t,x) \in F(x)$，$t<1$。然后，分片线性地扩张到$T$的每个单纯形的闭包上。我们称

本文1986年9月收到

$\phi:(0,1]\times R^n\to R^n$为集值映射$F:R^n\to P(R^n)$关于单纯剖分$T$的一个单纯逼近。

定义向量标号法 $l:(0,1]\times R^n\to R^n$ 如下：$l(t,x)=\phi(t,x)-x$。称$(t,x)$为$\phi$的一个不动点，若$\phi(t,x)=x$；称$(t,x)$为$l$的一个零点，若$l(t,x)=0$。显然，$l$的零点即为$\phi$的不动点。

设$\tau=\langle y^0,y^1,\cdots,y^n\rangle\in T^n$，定义$\tau$的标号矩阵为

$$L_\tau=\begin{pmatrix}1\cdots\cdots1\\ l(y^0)\cdots l(y^n)\end{pmatrix}.$$

如果方程

$$L_\tau W=I,\qquad W\geqslant 0,$$

有解，则$\tau$为$T$的一个完备界面。称$\sigma\in T$为完备单纯形，如果它有一个完备界面。可以证明，每个完备单纯形都正好有两个完备界面[1]。

**引理1**[1]　$(1,c)$所在的$n$维界面$\tau_0$是$T$的位于$\{1\}\times R^n$的唯一完备界面。

以$T$中完备单纯形为节点，两个节点是连接的，如果它们有公共的完备界面，得到线图$\Gamma$。图$\Gamma$中节点$\sigma$的度数$\#(\sigma)$定义为$\Gamma$中与$\sigma$连接的节点数目。

**定理1**[1]　设$\sigma\in T$为节点，则当$\sigma$有一个完备界面在$\{1\}\times R^n$时，$\#(\sigma)=1$，否则$\#(\sigma)=2$。

单纯同伦算法正是从$T$中以$\tau_0$为界面的单纯形$\sigma_1$出发，沿图$\Gamma$走下去，直至得到满足所要求精度的不动点或零点为止。

在算法的每一步，面对的是$n+1$阶方阵$M=L_{\tau_{m-1}}$，其中$\tau_{m-1}$是$\sigma_{m-1}$与$\sigma_m$的公共几乎完备界面．由几乎完备界面的定义知方程$MW=I$，$W\geqslant 0$有解。记$y^+$为$\sigma_m$的不属于$\tau_{m-1}$的顶点，则现在要把$\begin{pmatrix}1\\ l(y^+)\end{pmatrix}$引入$M$，从而必须计算$M^{-1}\begin{pmatrix}1\\ l(y^+)\end{pmatrix}$，再用所得向量中的正元素除$W=M^{-1}$的相应行，设除得的各行中字典式最小者为第$p$行，则用$\begin{pmatrix}1\\ l(y^+)\end{pmatrix}$取代$M$中的第$p$列，得到新的基矩阵$M$及新的完备界面$\tau_m$。以$M^{-1}$的首行元素为系数，$\tau_m$顶点的凸组合给出分片线性映$\phi$的一个不动点$y^k$。若$x^k=p(y^k)$与$F(x^k)$的距离足够小，则$x^k$就为所求的数值不动点。因此，每一步的计算，求$M^{-1}$就成为关键的一环。

利用下面的结论，使我们一开始就能直接写出$M$的逆阵$M^{-1}$，并且在以后每一步取主转移运算中，利用初等矩阵的性质，很容易从原矩阵的逆过渡到新的基矩阵的逆，并且由于采用初等矩阵，使计算过程大为简化。

**引理2**

若　$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ &1&\cdots&1\\ &&\ddots&\vdots\\ &&&1\end{pmatrix},$$　则　$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&&\\ &1&-1&\\ &&\ddots&\ddots\\ &&&-1\\ &&&1\end{pmatrix}.$$

**引理 3**　若 $A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ C-W^0 & \cdots & C-W^n \end{pmatrix}$，　$W=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ W^0 & \cdots & W^n \end{pmatrix}$

且$W^{-1}$已知，则　$A^{-1}=W^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & -I \end{pmatrix}$。

引理 2 是显然的，引理 3 可由$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & -I \end{pmatrix}A=W$直接验证。

设矩阵$M=(P_1\cdots P_l\cdots P_n)$，而$\overline{M}$是把$M$的第$l$列$P_l$换为$P_k$而成的矩阵，即$\overline{M}=(P_1\cdots P_k\cdots P_n)$，又设

$$M^{-1}P_k=\begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{lk} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix},\qquad E^l=\begin{pmatrix} 1 & & -x_{1k}/x_{lk} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1/x_{lk} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -x_{nk}/x_{lk} & & 1 \end{pmatrix}.$$

初等矩阵$E^l$通常简记为

$$E^l=\left(l,\ -x_{1k}/x_{lk},\ \cdots,\ -x_{l-1,k}/x_{lk},\ 1/x_{lk},\ -x_{l+1,k}/x_{lk},\ \cdots,\ -x_{nk}/x_{lk}\right).$$

**引理 4**　设$M$，$\overline{M}$，$E^l$如上设，则$\overline{M}^{-1}=E^lM^{-1}$。

事实上，由

$$M^{-1}\overline{M}=M^{-1}(P_1\cdots P_k\cdots P_n)=(e_1\cdots M^{-1}P_k\cdots e_n)$$

知

$$E^lM^{-1}\overline{M}=E^l(e_1\cdots M^{-1}P_k\cdots e_n)=I$$

故　$\overline{M}^{-1}=E^lM^{-1}$。

回到我们的算法，一开始，在$\{1\}\times R^n$上取单纯形

$$\tau_0=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\rangle,$$

$$\left(\text{或}\tau_0=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix}-1\\-1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\right)$$

则　$$W=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ W^0 & \cdots & W_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

故$W$的逆可直接写出来。

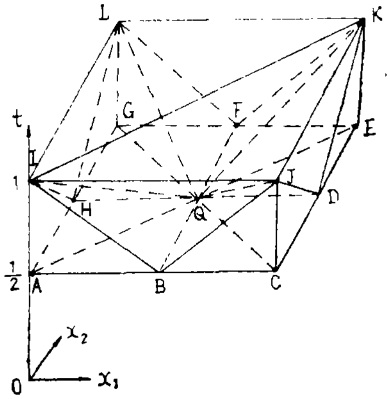
进一步，取$c$为$\tau_0$的重心坐标，由于$M$的首行元素都为 1，故易知$M^{-1}$的第一列必为$\left(\frac{1}{n+1},\cdots,\frac{1}{n+1}\right)^T$。而$M^{-1}$除第一列外都与$W^{-1}$对应的列差一个符号，这样，不经计算即可直接写出$M_0$的逆矩阵为：

$$M_0^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 1 & & \\ \frac{1}{n+1} & -1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ \frac{1}{n+1} & & & -1 \end{pmatrix}.$$

从已知的$M_0^{-1}$出发，利用引理 4，我们就能很容易的实现每一步的单纯形取主转移。

**实例** 计算集值映射$F:R^2\to P(R^2)$的不动点，$F(x)=\left\{x+\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}-x\right)\right\}$，

也就是 $F(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}-x_1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$。




如图 1 取

$$\tau_0=\langle I,J,K\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

则 $$C=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}.$$

易见$\begin{pmatrix}1\\C\end{pmatrix}$位于$T$在$\{1\}\times R^2$的2维界面$\langle I,J,K\rangle$。

$$M_0=\begin{pmatrix}1&1&1\\C-I&C-J&C-K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\ \frac{2}{3}&-1/3&-1/3\\ \frac{1}{3}&1/3&-2/3\end{pmatrix},$$

$$M_0^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&1&0\\1/3&-1&1\\1/3&0&-1\end{pmatrix}.$$

从$M_0$开始执行基础算法，计算过程见下表（有关符号同文〔1〕）：

| K | $M^{-1}$ | | $y^+$ | $\begin{pmatrix}1\\l(y^+)\end{pmatrix}$ | $M^{-1}\begin{pmatrix}1\\l(y^+)\end{pmatrix}$ | $\Delta$ | $y^-$ | $El$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/3 1 0<br>1/3 −1 1<br>1/3 0 −1 | I<br>J<br>K | Q | 1<br>1/3<br>−1/6 | 2/3<br>−1/6<br>1/2 | 1/2<br>—<br>2/3 | | (1,3/2,1/4,−3/4) |
| 1 | 1/2 3/2 0<br>5/12 −3/4 1<br>1/12 −3/4 −1 | Q<br>J<br>K | D | 1<br>−2/3<br>−1/6 | −1/2<br>3/4<br>3/8 | —<br>5/9<br>2/9 | K | (3,4/3.−2.8/3) |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $\begin{pmatrix} 11/18 & 1/2 & -4/3 \\ 1/4 & 3/4 & 3 \\ 2/9 & -2 & 8/3 \end{pmatrix}$ | Q<br>J<br>D | C | $\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1/6 \\ 3/4 \\ 28/9 \end{pmatrix}$ | —<br>1/3<br>1/14 | D | $(3, \frac{9}{28}, -\frac{27}{112}, \frac{3}{56})$ |
| 3 | $\begin{pmatrix} 43/63 & -1/7 & -10/21 \\ 11/56 & 69/56 & 33/14 \\ 1/84 & -3/28 & 1/7 \end{pmatrix}$ | Q<br>J<br>C | B | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 10/21 \\ 39/28 \\ 1/42 \end{pmatrix}$ | 43/30<br>11/78<br>1/2 | J | $(2, \frac{28}{39}, -\frac{280}{819}, \frac{14}{819})$ |
| 4 | $\begin{pmatrix} \frac{1349}{1638} & \frac{135}{182} & \frac{332}{273} \\ -\frac{55}{819} & -\frac{115}{273} & -\frac{220}{273} \\ \frac{25}{1638} & -\frac{47}{546} & \frac{50}{273} \end{pmatrix}$ | Q<br>B<br>C | …… | | | | | |

上表中例如 $M_0^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$E^0=\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

根据引理4， $M_1^{-1}=E^0M_0^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 5/12 & -3/4 & 1 \\ 1/12 & -3/4 & -1 \end{pmatrix}$.

$\Delta$是用$M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ l(y^+) \end{pmatrix}$的正元素除$M^{-1}$的首列对应元素所得的结果。

上例经过4步的转轴运算，已离开了$t=1$人为层，进入下一层$t=\frac{1}{2}$，继续做下去，就能求出数值不动点。

## 参 考 文 献


〔1〕王则柯，单纯不动点算法基础，中山大学出版社，1986.

〔2〕Allgower. E. & Georg K., *SIAM Review*, 22 (1980), 28—85.


# The Numerical Realization of the Simplicial Homology Algorithms

*Chen Zepeng*


**Abstract**

The Eaves-Saigal Simplicial homology algorithms are a class of new methods to calculate the fixed-point of Kakutani. This paper presents a convenient method to realize the Eaves-Saigal algorithms.


**Keywords** point-to-set maps, simplicial subdivision, labelling matrix.