

近海水域温排水对流扩散数值模拟

——差分有限元破开算子法

詹杰民 张涤明

(力学系)

摘 要

本文提出一种模拟近海水域在河流与潮汐共同作用下,温排水对流扩散问题的新的数值方法。此法将有限单元法和边界拟合坐标差分法结合起来,我们称为差分有限元破开算子法。计算结果表明,这是一种很有效的数值模式。

关键词 流与潮汐,温排水,对流扩散,差分有限元破开算子法

1 引言

模拟温排水的流态和温度分布时,通常会遇到处理对流项和边界条件上的困难。用有限差分法计算时,对流项可采用迎风格式进行处理,但在边界上,要构造既在数值上稳定,又在物理上合理的边界条件是不易的;用有限元法计算,虽有能适应复杂几何形状和各种边界条件的优点,但对非线性、非对称的对流算子的处理却有一定的困难。为了克服上述困难,本文提出一种将有限单元法和边界拟合坐标差分法结合起来的分步时间方法,其主要特点是将原方程分解为两组方程,第一组保留原方程组对流项,第二组保留扩散项和源项。在前半步长里,对第一组方程用边界拟合坐标差分法求解,同时使用稳定性好的迎风格式。在后半步长里对第二组方程用集中质量的有限元法进行计算。本方法稳定性好,能适应复杂的边界形状和各种不同的边界条件,在理论和实际应用上都优越于单纯的有限单元法和有限差分法。

2 基本方程和边界条件

在如图1所示的坐标系下,近海水域温排水对流扩散问题的方程为:

本文1987年2月收到

• 国家自然科学基金资助项目

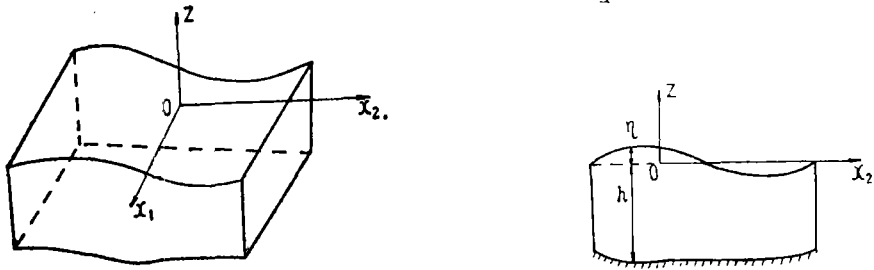


图 1 Fig.1

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{1}{H} (\vec{Q} \cdot \nabla) Q_i &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \varepsilon \nabla^2 Q_i + \tau_{ai} / \rho - \frac{g}{C^2 H^2} |\vec{Q}| Q_i \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{H} (\vec{Q} \cdot \nabla) \theta &= \frac{1}{H} \text{div} (HE \text{grad} \theta) - \frac{K_s}{\rho C_p H} \theta \end{aligned} \right. \quad (3)$$

其中： \vec{Q} ——流量矢量； $\vec{Q} = (Q_1, Q_2) = \int_{-h}^{\eta} (U_1, U_2) dz$ ； Q_1, Q_2 —— x_1, x_2 方向上的流量； U_1, U_2 —— x_1, x_2 方向上的速度； H ——水体总深度， $H = h + \eta$ ； h ——相对于静止水面的水深； η ——波高； θ ——超温， $\theta = T - T_{\infty}$ ； T ——垂向平均温度； T_{∞} ——环境温度； τ_{a1}, τ_{a2} ——风应力在 x_1, x_2 方向上的分量， $(\tau_{a1}, \tau_{a2}) = \gamma_a \rho_a |\vec{W}| \vec{W}$ ； \vec{W} ——风速度向量； ρ_a ——空气密度； γ_a ——风应力系数； C ——谢才系数； g ——重力加速度； ε ——湍粘系数； E ——水的涡动热扩散系数； K_s ——水面散热系数； ρ ——水的密度； C_p ——比热。

边界条件为：在岸边界上， $u_i \cdot n_i = 0, \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot n_i = 0$ （绝热条件）

其中 n_i 为岸边界法向单位矢量的分量。

在水边界上，给定流速和潮位过程曲线。

3 计算方法

用分步时间法，方程 (1) - (3) 可分解为：

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{H} (\vec{Q} \cdot \nabla) f = 0 \quad (4)$$

和

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial Q_i}{\partial t} &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \varepsilon \nabla^2 Q_i + \tau_{ai} / \rho - \frac{g}{C^2 H^2} |\vec{Q}| \cdot Q_i \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div} \vec{Q} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{H} \text{div} (HE \text{grad} \theta) - \frac{K_s}{\rho C_p H} \theta \end{aligned} \right. \quad (7)$$

在式 (4) 中， f 代表 Q_1, Q_2 或 θ 。

对于方程 (4)，我们引进边界拟合坐标系^[1-3]，方程化为：

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{JH} \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \cdot Q_2 - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} Q_1 \right) \frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} Q_1 - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} Q_2 \right) \right] \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = 0 \quad (4')$$

其中, ξ_1, ξ_2 ——变换平面的坐标分量

$$J \text{——雅可比行列式, } J = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}.$$

而对方程(5) — (7), 采用集中质量的有限元法进行求解。单元形式为九节点等参单元。如果用 F 代表坐标 x_i , 流量 Q_i , 潮位 η 或超温 θ , 则 F 在单元 e 内可表为

$$F = \sum_{i=1}^9 N_i F_i$$

其中, 对于角结点 (如图 2)

$$N_i = \frac{1}{4} (X X_i + X^2) (Y Y_i + Y^2), \quad (X_i, Y_i) = (\pm 1, \pm 1)$$

对于边结点

$$N_i = \frac{1}{2} (X X_i + X^2) (1 - Y^2), \quad (X_i, Y_i) = (\pm 1, 0)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (Y Y_i + Y^2) (1 - X^2), \quad (X_i, Y_i) = (0, \pm 1)$$

对于中心结点

$$N_i = (1 - X^2) (1 - Y^2), \quad (X_i, Y_i) = (0, 0)$$

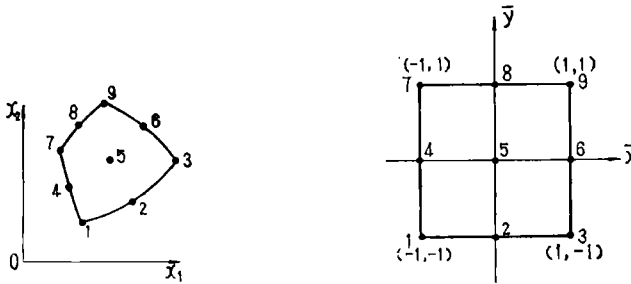


图 2 Fig.2

这样, 方程(5) — (7) 可用下列的有限元方程表示

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_A \frac{\partial Q_i}{\partial t} N_j dA &= \iint_A \left[\left(-gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \tau_{ai}/\rho - \frac{g}{C^2 H^2} |\vec{Q}| Q_i \right) N_j - \varepsilon \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \right) \right] \\ &\quad \cdot dA + \oint_s \varepsilon N_j \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_k} n_k \right) ds \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \iint_A \frac{\partial \eta}{\partial t} N_j dA = - \iint_A \operatorname{div} \vec{Q} \cdot N_j dA \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_A \frac{\partial \theta}{\partial t} N_j dA &= \iint_A \left[-\frac{K_s N_j}{\rho C_p H} \theta + \frac{E}{H} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) N_j - E \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial N_j}{\partial x_i} \right) \right] dA \\ &\quad + E \oint_s N_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_i ds \end{aligned} \right. \quad (10)$$

利用结点上的关系式

$$N_i N_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

和辛普生积分

$$\int_{\Omega} F dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} F J dX dY = \sum_{j=1}^3 F_j J_j \alpha_j$$

其中, $\alpha_i = \frac{1}{9}$ 在角点; $\alpha_i = \frac{4}{9}$ 在边界点; $\alpha_i = \frac{16}{9}$ 在中心点。

而 J ——雅可比行列式, $J = \frac{\partial x_1}{\partial X} \frac{\partial x_2}{\partial Y} - \frac{\partial x_1}{\partial Y} \frac{\partial x_2}{\partial X}$

方程 (8) — (10) 化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial t} \right)_i = \frac{1}{d_i} \left\{ \iint_A \left[\left(-gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \tau_{oi}/\rho - \frac{g}{C^2 H^3} |\vec{Q}| Q_i \right) N_i \right. \right. \\ \left. \left. - \epsilon \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \right) \right] dA + \epsilon \oint_s N_i \frac{\partial Q_i}{\partial x_k} n_k ds \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_i = -\frac{1}{d_i} \iint_A \operatorname{div} \vec{Q} N_i dA \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_i = \frac{1}{d_i} \left\{ \iint_A \left[-\frac{K_s N_j}{\rho C_p H} \theta + \frac{E}{H} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) N_i \right. \right. \\ \left. \left. - E \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial N_i}{\partial x_i} \right) \right] dA + E \oint_s N_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_i ds \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $d_i = \sum_{e \supset j} (J \alpha)_j$

方程 (4') 和 (11) — (13) 是我们在计算中使用的方程。

4 数值计算和结果

在计算中, 网格是通过求解下列椭圆型方程自动生成的^[1-3,7](如图 3 和图 5)。

$$\alpha \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_1^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \gamma \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_2^2} + J^2 \left(P \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} + Q \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \right) = 0 \quad (14)$$

其中, $\alpha = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}$, $\beta = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}$, $\gamma = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$

P, Q 为网格密度函数

在求解方程 (7) 时, 对流项采用迎风格式, 变量对时间的变化率取为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+\frac{1}{2}} - f^n}{\frac{1}{2} \Delta t} \quad (15)$$

而在求解方程 (11) — (13) 时, 变量 f 对时间的变化率取为,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \Delta t} \tag{16}$$

波高 η 对时间的变化率则为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} \tag{17}$$

这样，各变量对时间的微商均取为向前差来近似，在空间上，我们采用了显式格式，因而最后得到的计算格式是显式的。

图3所示的模型是用于检验数值方法的，对于该模型，在一维定常形式

$$\begin{cases} u_1 \frac{du_1}{dx_1} = \frac{1}{Re} \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} \\ u_1 |_{x_1=0} = 1 \\ u_1 |_{x_1=1} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

下，有下列解析解

$$u_1 = \frac{1 - e^{Re(x_1-1)C_1}}{1 + e^{Re(x_1-1)C_1}} \cdot C_1 \tag{19}$$

其中， C_1 满足

$$\frac{1 - C_1}{1 + C_1} = -e^{-2ec_1}$$

分别用本文的方法和有限单元法对此模型作了计算。用本文的方法，在 $\Delta t = 300$ 秒时，计算收敛得很好，其最终的稳定解与一维解析解非常吻合（如图4示），而用有限单元法计算时， Δt 减小到30秒，计算仍不稳定。

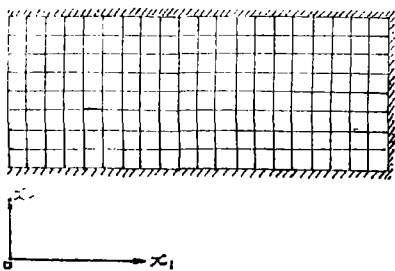


图3 验证数值方法的模型
Fig. 3 Model used to test numerical method

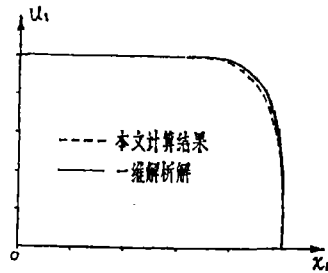


图4 模型计算结果比较图
Fig. 4 Result for model

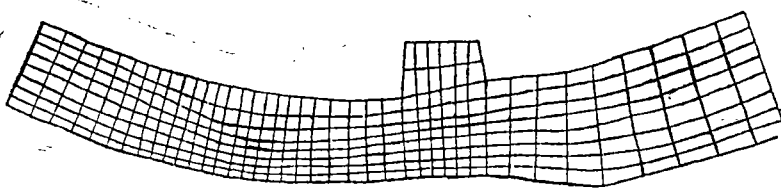


图5 实际算例的网格图
Fig. 5 Net for an acture instance.

图5是一个实际算例的网格。图6和图7是此算例的流态计算结果,江水的流动除了排取水口附近外,其余地方基本保持了沿岸流动的趋势,这说明排水对整个流场的影响是微弱的。从图中还可以看出,由于排取水方向的影响,在流场中出现了涡旋运动。



图6 涨潮时的流态
Fig.6 Fluid field of flood-tide

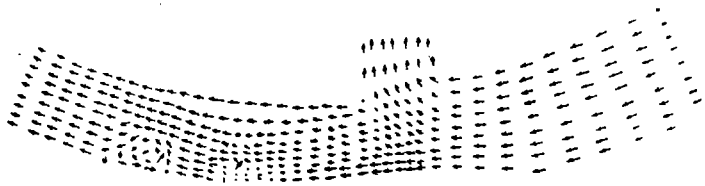


图7 退潮时的流态
Fig.7 Fluid field of ebb tide

图8和图9是上述计算实例的超温分布情况。排取水口附近的超温值图8普遍较图9的高,这是因为在涨潮的时候,由于热水回流聚集,热量不易散发出去的缘故。而从整个计算结果来看,取水口处的超温基本保持在 1°C 以下。

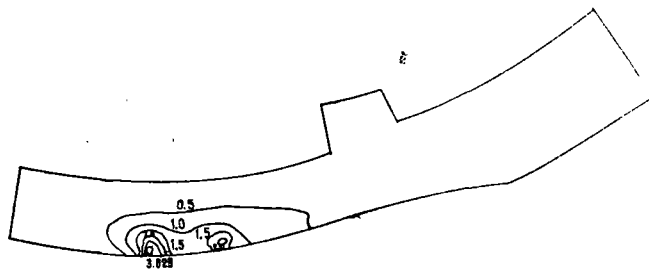


图8 涨潮时的温度分布
Fig.8 Temperature field of flood-tide

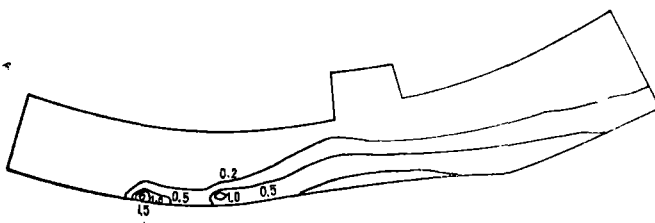


图9 退潮时的温度分布
Fig.9 Temperature field of ebb tide

参 考 文 献

- [1] J.F. Thompson, F.C. Thames and C.W. Mastin, *Journal of Computational Physics*, 15(1974), 299.
- [2] 张涤明、詹杰民, 中山大学学报(自然科学版), 1986, 3, 39.
- [3] 汤奔阳、张涤明, 力学学报, 1987, 1.
- [4] Hansen W., *Tellus VIII*: 287—300, 1956.
- [5] 苏纪兰, 力学与实践, 7 (1985), 5, 11—16.
- [6] 吴江航, 计算物理, 2 (1985), 2.
- [7] J.F. Thompson, *Computation Fluid Dynamics*, Hemisphere Publishing Corporation, 1980, P.1.
- [8] Heaps, N.S., *Second International meeting on Computation Methods in Applied Science an Engineering*, Paris, Dec., 1976.

Operator-Splitting Method with FDM and FEM for the Convection and Diffusion Problems of Heated Discharge Acted on by Tide and Stream

Zhan Jiemin Zhang Diming

Abstract

This paper gave a numerical modelling for the convection and diffusion problems of heated discharge acted on by tide and stream in nearshore water. We call it a operator-splitting method with FDM and FEM. Numerical results have shown that it is a very effective method.

Keywords stream and tide, convection and diffusion, heated discharge, operator-splitting method with FDM and FEM