

· 研究简报 ·

二 维 系 统 的 渐 近 解 法

徐 兆
(力学系)

研究方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + \varepsilon P(x, y, \varepsilon), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + \varepsilon Q(x, y, \varepsilon), \quad (1)$$

其中 ε 为小参数. 令 $V(x) = \int_0^x g(u) du$. 假设 $g(x)$, $V(x)$, $P(x, y, \varepsilon)$ 和 $Q(x, y, \varepsilon)$ 满足下列条件:

- (i) $g(x)$, $P(x, y, \varepsilon)$ 和 $Q(x, y, \varepsilon)$ 有所需的各阶导数, $g(0) = P(0, 0, \varepsilon) = Q(0, 0, \varepsilon) = 0$;
(ii) 存在四个数, $\beta_2 < \beta_1 \leq 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, 使 $V(\alpha_1) = V(\beta_1)$, $V(\alpha_2) = V(\beta_2)$; 当 $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ 和 $x \in (\beta_2, \beta_1)$ 时, $xg(x) > 0$; 当 $x \in (\beta, \alpha)$ 时, $V(\alpha) - V(x) > 0$, 其中 $V(\alpha) = V(\beta)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta \in (\beta_2, \beta_1)$.

把方程组(1)的解写成如下形式:

$$x = a \cos \varphi + b + \varepsilon x_1(a) + \varepsilon^2 x_2(a) + \dots, \quad (2)$$

$$y = -a \Phi_0(a, \varphi) \sin \varphi + \varepsilon y_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 y_2(a, \varphi) + \dots, \quad (3)$$

式中 a 和 φ 是时间的函数, 满足下面的方程:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi_0(a, \varphi) + \varepsilon \Phi_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 \Phi_2(a, \varphi) + \dots, \quad (5)$$

此处 $\Phi_i(a, \varphi)$ 为 φ 的以 2π 为周期的函数, 其中

$$\Phi_0(a, \varphi) = \sqrt{2[V(a+b) - V(a \cos \varphi + b)]} / a^2 \sin^2 \varphi, \quad \varphi \neq n\pi;$$

$$\Phi_0(a, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \Phi_0(a, \varphi), \quad \Phi_0(a, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \Phi_0(a, \varphi).$$

此外, $V(a+b) = V(-a+b)$, $a+b = \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$,
 $-a+b = \beta \in (\beta_2, \beta_1)$.

本文1986年4月收到

把式(2)、(3)、(4)和(5)代入(1)并令ε的相同幂次的系数相等,就得到下列方程:

$$y_i = A_i(h + \cos\varphi) - a\Phi_i \sin\varphi + G_{i-1}, \tag{6}$$

$$\Phi_0 \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} = A_i \left(\Phi_0 + a \frac{\partial \Phi_0}{\partial a} \right) \sin\varphi + a\Phi_i \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi_0 \sin) - g'(a \cos\varphi + b)x_i + H_{i-1}, \tag{7}$$

式中 $h = [g(-a+b) + g(a+b)]/[g(-a+b) - g(a+b)]$, G_{i-1} 和 H_{i-1} 为 $x_1, \dots, x_{i-1}, A_1, \dots, A_{i-1}, \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{i-1}$ 的已知函数,把(6)代入(7)得

$$a \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Phi_i \Phi_0 \sin^2\varphi] = -A_i (2\Phi_0 + a \frac{\partial \Phi_0}{\partial a}) \sin^2\varphi + x_i g'(a \cos\varphi + b) \sin\varphi - f_{i-1}(a, \varphi) \sin\varphi, \tag{8}$$

式中 f_{i-1} 为已知函数,例如

$$f_0(a, \varphi) = Q(a \cos\varphi + b, -a\Phi_0 \sin\varphi, 0) + \Phi_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} P(a \cos\varphi + b, -a\Phi_0 \sin\varphi, 0).$$

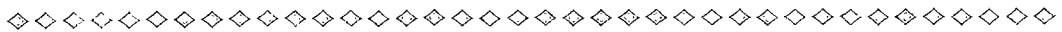
由(8)逐次求解得

$$x_i(a) = a \int_0^\pi \left[f_{i-1}(a, \theta) + A_i (2\Phi_0 + a \frac{\partial \Phi_0}{\partial a}) \sin\theta \right] \sin\theta d\theta / [g(a+b) - g(-a+b)];$$

$$A_i(a) = - \int_0^{2\pi} f_{i-1}(a, \theta) \sin\theta / \int_0^{2\pi} [2\Phi_0(a, \theta) + a \frac{\partial \Phi_0(a, \theta)}{\partial a}] \sin^2\theta d\theta,$$

$$\Phi_i(a, \varphi) = \left\{ x_i \left[g(a+b) - g(a \cos\varphi + b) \right] - a \int_0^\varphi \left[f_{i-1}(a, \theta) \sin\theta + A_i (2\Phi_0 + a \frac{\partial \Phi_0}{\partial a}) \sin^2\theta \right] d\theta \right\} / a^2 \Phi_0 \sin^2\varphi.$$

此外,
$$\int_0^{2\pi} \left[2\Phi_0(a, \theta) + a \frac{\partial \Phi_0(a, \theta)}{\partial a} \right] \sin^2\theta d\theta = \frac{2\sqrt{2} g(-a+b)g(a+b)}{a[g(-a+b) - g(a+b)]} \int_{-a+b}^{a+b} \frac{dx}{\sqrt{V(a+b) - V(x)}} > 0.$$



• 动态 •

碳酸盐比较沉积学学术讨论会在青岛召开

中国海洋地质学会、中国地质学会海洋地质专业委员会、地矿部海洋地质研究所于1986年9月2日至9月8日在青岛联合召开碳酸盐岩比较沉积学学术讨论会。参加会议的代表共70余名。会议选定64篇论文摘要汇集成册,提供学习交流,其中13篇在大会、18篇在小组会上发言。地矿部海洋地质研究所为会议举办了西沙群岛碳酸盐比较沉积学研究课题的图片和实物展览,放映了《中国西沙风成石灰岩》、《中国西沙礁石灰岩相沉积》两部录像片,丰富了会议内容。会议的召开,无疑将促进我国与碳酸盐岩有关的层状和层控金属、非金属矿床和油气藏的勘查与成因理论研究的不断深入。

(梁百和)