

· 研究简报 ·

## 不变集的区域稳定性

朱思铭

(数学系)

本文继续文[1]的工作, 将研究对象推广到(不变)集合中去, 讨论不变集的区域稳定性.

考虑  $n$  维欧几里得空间中的区域  $D$  及微分方程组

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

这里  $D$  可以是部分无界、部分有界而其边界也可以是部分开、部分闭的复杂区域,  $x, f$  为  $n$  维向量,  $f(t, x)$  在域  $G = \{(x, t) : t \geq 0, x \in D\}$  中定义且满足方程(1)解的存在唯一性条件.

假设集合  $M \subset D$  及  $D$  是方程(1)的不变集, 即对  $t = t_0 > 0, x^0 \in M (x^0 \in D)$  方程(1)的解  $x(t, x^0, t_0)$  有

$$x(t, x^0, t_0) \in M \quad (x(t, x^0, t_0) \in D), \quad \text{当 } t \geq t_0. \quad (2)$$

如果  $\bar{D} \setminus D \neq \phi$ , 还假设  $\rho_0 > 0$ , 这里

$$\rho_0 = \rho(M, \bar{D} \setminus D) = \{\inf \|x - y\| : x \in M, y \in \bar{D} \setminus D\}$$

$\bar{D}$  表示  $D$  的闭包,  $\phi$  表空集,  $\|x\|$  表  $x$  的模.

对  $x \in D$ , 定义

$$\xi(x) = \begin{cases} \rho(x, M) & \text{当 } \bar{D} \setminus D = \phi \\ \max\{\rho(x, M), \frac{\rho(x, M)}{\rho(x, \bar{D} \setminus D)}\} & \text{当 } \bar{D} \setminus D \neq \phi \end{cases}$$

定义集  $M$  为(1)的域  $D$  内稳定集, 如果对任意  $\varepsilon > 0, t_0 \geq 0$  存在  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ , 使当  $\xi(x^0) < \delta$  时有  $\xi(x(t, x^0, t)) < \varepsilon$  (当  $t \geq t_0$ ). 称  $M$  为(1)的  $D$  内吸引域, 如果存在  $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ , 使当  $\xi(x^0) < \delta_0$  时, 对任何  $\varepsilon > 0$  有  $T = T(\varepsilon, t_0, x^0)$ , 使当  $t \geq t_0 + T$  时, 有  $\xi(x(t, x^0, t_0)) < \varepsilon$ . 如果  $\delta_0$  可任意大, 则称  $M$  为  $D$  内全局吸引集. 称  $M$  为  $D$  内渐近稳定集, 如果  $M$  是  $D$  内稳定集, 且是  $D$  内吸引集. 称  $M$  为  $D$  内全局渐近稳定集, 如果  $M$  是  $D$  内稳定集, 且是  $D$  内全局吸引集.

类似地可定义  $D$  内一致稳定集、 $D$  内全局一致稳定集、 $D$  内有界集、 $D$  内一致渐近稳

本文1987年4月收到

定集、 $D$ 内全局一致渐近稳定集等。

同样,可以定义域 $D$ 内对集 $M$ 常正的函数 $V(t, x)$ ,如在 $G$ 内 $V(t, x)$ 连续可微, $V(t, x) \geq 0$ ,且当 $x \in M$ 时 $V(t, x) = 0$ , (对 $t \geq 0$ )。称 $V(t, x)$ 为域 $D$ 内对 $M$ 定正的,如果 $V(t, x)$ 在 $D$ 内对 $M$ 常正并有连续函数 $W(x)$ ,使 $V(t, x) \geq W(x) \geq 0$ ,且当 $\xi(x) \neq 0$ 时 $W(x) > 0$ 。类似地可以定义 $D$ 内对 $M$ 常负、定负、无限小上界、无限大下界等。

在上述定义下,我们可以容易地将关于Ляпунов稳定性及全局渐近稳定性定理推广成域 $D$ 内对不变集 $M$ 的稳定性定理。例如有

**定理**  $M$ 对(1)在 $D$ 内全局一致渐近稳定,如果存在函数 $V(t, x)$ 在 $D$ 内对 $M$ 定正、 $D$ 内对 $M$ 具无限小上界和无限大下界,同时其全导数 $\dot{V}(t, x)$ 在 $D$ 内对 $M$ 定负。

**注** 当 $\bar{D} \setminus D = \emptyset$ 时,文[1]及本文的定义和通常的Ляпунов稳定性定义相同。当集 $M$ 为一点即 $M$ 为一原点时,本文中的 $\xi(x)$ 与文[1]相同,即当 $\bar{D} \setminus D \neq \emptyset$ 时为

$$\xi(x) = \max(\|x\|, \frac{\|x\|}{\rho(x, \bar{D} \setminus D)}).$$

本文有关结果可用于讨论生态系统中的不变集如极限圈的稳定性。

### 参 考 文 献

- [1] 朱思铭,中山大学学报(自然科学版),1984,4,1—9.