

· 研究简报 ·

支承方式对引力波天线Q值影响的研究

郑庆璋

(物理学系)

关键词 引力波, 天线, Q值

1. 硬支承和软支承

在引力波的作用下, 弹性天线体中形成一个位移振动场(位移是时间和空间的连续函数), 场中可能有若干个位移为零(不动)的点——节点。节点可以在真实的弹性体内, 也可以在假想的延伸弹性体中。

为了克服地球的重力, 天线在运行时必须采用适当的方式支承。理想的支承点当然是天线的节点, 因为这样不会影响天线的本征频率和它的Q值。但由于种种原因, 有时不得不让支承点与天线的节点有所偏离^[1,2], 这就必须考虑支承所引起的一些效应。本文研究支承方式对天线Q值的影响。

支承方式可以分为软支承和硬支承两类。所谓硬支承, 是指在支承条件下完全不让天线中的支承点运动, 这实质上是使支承点成为天线位移场中新的节点, 因而也就完全改变了天线的本征振动。但是, 由于支承点完全不运动, 所以没有附加的能量损耗, 对天线系统的Q值没有影响。

如果支承方式容许天线中的支承点在一定的条件下运动, 这可称之为软支承。绝大多数的实际情况都是属于软支承的情形。支承点按一定方式运动的条件便构成了天线位移场的附加边界条件, 这一方面使天线的本征频率受到一定的影响, 另一方面也由于支承点有运动, 天线对支承点的反作用力便要作功, 耗散了天线的一部分能量, 因而会使天线的Q值下降。

本文主要讨论在软支承的条件下, 尤其是圆柱形天线的情形, 支承对天线Q值的影响。

2. 天线系统的Q值

按定义, 天线的品质因数(即Q值)为

$$Q = \frac{2\pi \times \langle \text{系统贮存的能量} \rangle}{\langle \text{一个周期内损失的能量} \rangle}$$

今除天线本身损耗的能量外, 尚有由于支承等其他原因的能量损耗, 即

本文于1986年12月收到

$$\frac{1}{Q} = \frac{\langle \text{一个周期内天线本身损耗的能量} \rangle + \langle \text{一个周期内支承及其他原因损耗的能量} \rangle}{2\pi \times \langle \text{系统贮存的能量} \rangle}$$

$$= \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_1} \quad (1)$$

其中 Q 为天线系统的 Q 值, Q_0 为天线本身固有的 Q 值, Q_1 为支承系统的 Q 值。由此可见, 引入支承耗散后, 系统的 Q 值化为

$$Q = \frac{Q_0 Q_1}{Q_0 + Q_1} \quad (2)$$

这个式子说明, 当 $Q_1 \gg Q_0$ 时, $Q \approx Q_0$, 即天线系统的 Q 值不改变。若 $Q_1 \ll Q_0$, 则 $Q \approx Q_1$, 即天线系统的 Q 值降为支承系统振动的 Q 值。

3. 圆柱形天线的情形

对于以质心为节点的圆柱形天线——韦伯棒, 基频纵波振动位移为

$$\xi = \xi_0 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \cos \omega t \quad (3)$$

其中 ξ_0 为振幅, ω 为圆频率, L 为圆柱的长度。离原点 x 、厚度为 dx 的一段薄片(图1)的振动能为

$$dE = \frac{1}{2} (\rho S dx) \omega^2 \xi_0^2 \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

其中 ρ 为天线的质量密度, S 为天线的横截面面积。整条天线上所贮存的振动能量为

$$E = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 \xi_0^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

积分之并注意 $\rho SL = M$ 为天线的总质量, 得

$$E = \frac{1}{4} M \omega^2 \xi_0^2 \quad (4)$$

假定天线作用在支承点上的反作用力(与天线位移同相)为

$$F = F_0 \cos \omega t \quad (5)$$

则支承点的受迫振动位移为

$$\eta = \eta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

其中受迫振动的振幅及初相分别为

$$\eta_0 = \frac{h}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \varphi = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{2\beta\omega}{\Omega^2 - \omega^2}\right) \quad (7)$$

而 $h = F_0/m$, $\beta = \gamma/2m$ 为支承点运动的阻尼因素, $\Omega = \sqrt{k/m}$ 为支承系统的本征频率, m 为支承点的等效质量, γ 为等效阻力系数, k 为等效刚性系数。

天线对支承点每周期所作的功为

$$w_1 = \int_0^T \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_0^T F \frac{d\eta}{dt} dt = -F_0 \eta_0 \omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt = -\pi F_0 \eta_0 \sin \varphi$$

注意到

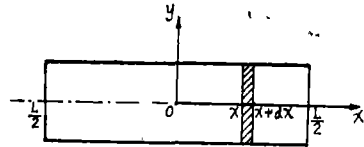


图 1

Fig.1 The scheme of longitudinal section of a cylindrical antenna

$$\sin\varphi = \frac{\text{tg}\varphi}{\sqrt{1+\text{tg}^2\varphi}} = \frac{-2\beta\omega}{\sqrt{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

得

$$\omega_1 = \frac{2\pi\beta\omega m h^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2} \tag{8}$$

把以上结果代入Q值的定义式子中, 得

$$Q_1 = \frac{2\pi E}{\omega_1} = \frac{M\omega\xi_0^2[(\Omega^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]}{4\beta m h^2} \tag{9}$$

或

$$Q_1 = \frac{mM\omega\xi_0^2[(\Omega^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]}{4\beta F_0^2} \tag{9}'$$

4. 圆柱形天线采用悬挂方式支承的情形

假定悬索的长度为 l , 悬点间的纵向距离为 a (图2)。若天线中 $x = \frac{a}{2}$ 点的位移为 ξ 时, 支承点的位移为 η , 则天线通过悬索作用到支承点上的力 (指水平分力, 垂直分力不用考虑) 在共有四个悬点 (即支承点) 的情况下为 (参看图3):

$$F = \frac{1}{4} Mg \text{tg}\theta = \frac{1}{4} Mg \frac{\xi - \eta}{l} \\ \simeq \frac{1}{4} Mg \frac{\xi}{l}$$

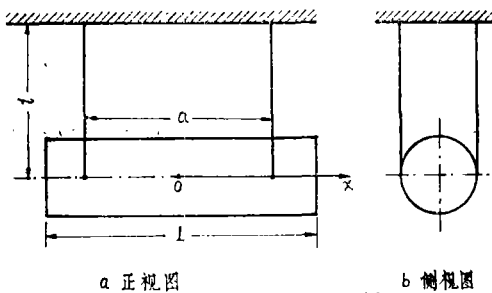


图 2

Fig.2 The cylindrical antenna supported with suspended formalism.

a) front view b) side view

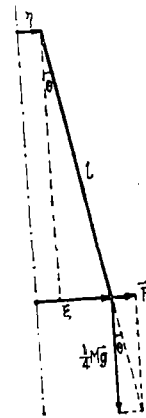


图 3

Fig.3 The decomposition of force which applied by antenna at supporting point

这是因为在一般情况下支承点的受迫振动位移 $\eta \ll \xi$ 的缘故。以 (3) 式的 ξ 代入, 并注意到目前情况下 $x = \frac{a}{2}$, 得

$$F = \frac{Mg}{4l} \xi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{L}\right) \cos\omega t \quad (10)$$

由(5)式可见,在四个支承点的运动情况类似,有相同的耗散功率的情况下,(9)'式的等效 F_0 为

$$F_0 = 4 \times \frac{Mg}{4l} \xi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{L}\right) = \frac{Mg}{l} \xi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{L}\right) \quad (11)$$

代入(9)'式,得

$$Q_1 = \frac{m\omega l^2 [(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]}{4\beta M g^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{L}\right)} \quad (12)$$

令 $\omega_g^2 = \frac{g}{l}$,则显然 ω_g 为与悬索等长的单摆圆频率。于是上式又可写成

$$Q_1 = \frac{m\omega [(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]}{4\beta M \omega_g^4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{L}\right)} \quad (12)'$$

5. 讨论

由上面的分析可见,尽管我们没有给出支承点及关联物的细节,因而对其特征参量诸如 m 、 Ω 、 β 等还不甚了了,无法给出 Q_1 的具体数值。但作为定性方面的参考,上面的结果还是很有意义的。

在考虑天线的支承方式时,无疑应首先考虑使天线系统有尽可能大的 Q 值,由(2)式可见,这就要求有尽可能高的 Q_1 值。再由(12)式或(12)'式可见:

(1) 支承点要尽可能接近节点。当 $a=0$ 时, $Q_1=\infty$, $Q=Q_0$;这是最有利的情况,也是韦伯最早的悬挂方式。

(2) 不要让支承点发生共振。当改变支承点振动的本征频率使 $\Omega=\omega$ 时,(12)式中的方括号具有最小值 $4\beta^2\omega^2$,因而 Q_1 也具有最小值。这当然对提高系统的 Q 值不利。要尽可能使 Ω 远离 ω ,在此情况下 β 愈小愈好。

(3) 支承点应有尽可能大的“惯性”,即令其等效质量 m 愈大愈好。在悬挂支承的情况下,悬索愈长(l 愈大或 ω_g 愈小)愈好。

(4) 就天线本身来讲,其本征频率愈高愈好。在悬挂支承的情况下,天线的质量 M 较小则较为有利。

参 考 文 献

- [1] M. Bassan et al., *Proc. of the 3rd M. Grossmann Meeting on G. R.*, North-Holland Pub. Comp., 1983, p.667.
 [2] W. S. Davis et al., *Proc. of the 3rd M. Grossmann Meeting on G. R.*, North-Holland Pub. Comp., 1983, p.1433.

The Research on Q Factor of Gravitational Wave Antenna Under the Influence of Supporting Formalism

Zheng Qingzhang

Abstract

The gravitational wave antenna must be supported during the operation, in order to cancel its weight. The ideal supported points are nodes of antenna. However, for a variety of reasons, sometimes the supported points may deviate from the nodes of antenna, and that must influence Q factor of the antenna. In this paper, we have considered the supporting formalism which influence on Q factor of antenna in general aspect, and have obtained some significative results.

Keywords Gravitational wave, Antenna, Q factor