中 山 大 学 学 报

1986年第4期　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　№. 4，1986

函数积分方程与波的有限传播法[*]

吴兹潛　　禤启沃

（计算机科学系）

摘　要

本文用Галеркин法求解一类函数积分方程，并应用于求解第二类双曲方程组[1]的定解问题。

§1　函数积分方程

平面双曲问题[1]常归结出形为

$$K[f(x)]\equiv xf'(x)-\sum_{m=1}^{S}a_m\alpha_m xf'(\alpha_m x)-\sum_{n=1}^{T}b_nf(\beta_n x)=h(x) \tag{1}$$

的函数微分方程，其中$f(x)$和$h(x)$分别是未知的和已知的函数，a_m、α_m、b_n、β_n是非零常数，且$|\alpha_m|<1$，$|\beta_n|\leqslant 1$。对于正整数μ，如果函数$f(x)$、$h(x)\in C^{\mu}_{[-b,b]}$适合方程(1)，而且$P_K\neq 0$，这里

$$P_k=k-k\sum_{m=1}^{S}a_m\alpha_m^k-\sum_{n=1}^{T}b_n\beta_n^k,\qquad k=0,1,\cdots,\mu-1 \tag{2}$$

易知$f^{(k)}(0)=h^{(k)}(0)/P_k\quad(k=0,1,\cdots,\mu-1)$。作函数替换

$$\bar{h}(x)=h(x)-\sum_{k=0}^{\mu-1}h^{(k)}(0)x^k/k!\ ,\quad \bar{f}(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{\mu-1}f^{(k)}(0)x^k/k!\ .$$

则$\bar{f}(x)$、$\bar{h}(x)=O(x^{\mu})$，且不难知道$L[\bar{f}(x)]=\bar{h}(x)$。因此对于方程(1)可设$f(x)$、$h(x)=O(x^{\mu})$。把方程(1)写成函数积分方程形式：

$$f(x)-\sum_{m=1}^{S}a_mf(\alpha_m x)-\sum_{n=1}^{T}b_n\int_0^x f(\beta_n t)\cdot\frac{1}{t}dt=h_1(x) \tag{3}$$

本文1985年1月收到

* 本项研究得到中山大学高等学术研究中心基金会资助

其中$h_1(x)=\int_0^x h(t)\cdot\frac{1}{t}dt=O(x^\mu)$。我们仅在$f(x)$、$h_1(x)\sim x^\mu(x\to o)$的范围内建立(3)的近似解法。在其余情况下，数值试验的结果表明算法失效。于是可设$f(x)=x^\mu\hat{f}(x)$，$h_1(x)=x^\mu\hat{h}(x)$，其中$\hat{f}(x)$与$\hat{h}(x)$在$[-b,b]$满足方程

$$\hat{f}(x)-\sum_{m=1}^{S}a_m\alpha_m^\mu\hat{f}(\alpha_m x)-\sum_{n=1}^{T}b_n\beta_n^\mu\int_0^1 t^{\mu-1}\hat{f}(\beta_n xt)dt=\hat{h}(x)$$

为方便用原来的字母，

$$L[f(x)]\equiv f(x)-T[f(x)]=h(x), \tag{4}$$

$$T[f(x)]\equiv\sum_{m=1}^{S}a_m\alpha_m^\mu f(\alpha_m x)+\sum_{n=1}^{T}b_n\beta_n^\mu\int_0^1 t^{\mu-1}f(\beta_n xt)dt$$

定理1　假设$h(x)\epsilon C[-b,b]$，$Q_\mu=\sum_{m=1}^{S}|a_m\alpha_m^\mu|+\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{T}|b_n\beta_n^\mu|<1$，则方程(4)在$C[-b,b]$恒有唯一且稳定的解。

证　记$M=\max_{|x|\leq b}|h(x)|$。行归纳法得$|T^p h(x)|\leq MQ_\mu^p$，故级数$\sum_{p=0}^{\infty}T^p[h(x)]$在$[-b,b]$一致收敛，其极限函数$f(x)\epsilon C[-b,b]$且满足(4)。该解在连续类中是唯一的，这是因为(4)对应的齐次方程

$$f(x)-T[f(x)]=0,\quad |x|\leq b \tag{5}$$

在$C[-b,b]$中只有平凡解。事实上，若记M_1为(5)的解$f(x)$在$[-b,b]$的最大绝对值，则由(5)得$|f(x)|\leq M_1Q_\mu$，在两边取最大得$M_1\leq M_1Q_\mu$，因$0<Q_\mu<1$，故$M_1=0$，即$f(x)$在$[-b,b]$恒为零。

证解的稳定性。设$\varepsilon=\max_{|x|\leq b}|h(x)|$，$M_2=\max_{|x|\leq b}|f(x)|$。由(4)得$|f(x)|\leq M_2Q_\mu+\varepsilon$，两边取最大得$M_2\leq M_2Q_\mu+\varepsilon$，故$M_2\leq\varepsilon/(1-Q_\mu)$，足见(4)的唯一连续解连续依赖于自由项$h(x)$，证毕。

考虑$[-b,b]$上的连续函数空间V。对于V中任意函数$f(x)$、$h(x)$，定义$(f,g)=\int_{-b}^{b}f(x)g(x)\,dx$，$\|f\|=\sqrt{(f,f)}$。易知$\|f(\alpha x)\|\leq|\alpha|^{-1/2}\|f(x)\|$，$|\alpha|\leq 1$。

设V_n为当$n\to\infty$时在V中稠密的子空间，基底为φ_1，φ_2，…，φ_n。今求$f_n\epsilon V_n$使

$$(Lf_n,\ L\varphi_i)=(h,\ L\varphi_i),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

亦即，要求$f_n=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i$的系数$c_i$满足

$$\sum_{j=1}^{n}c_j(L\varphi_j,\ L\varphi_i)=(h,\ L\varphi_i),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

以下证明当$n\to\infty$时，f_n按平方模收敛于方程(4)的真解$f(x)$。

定理 2 假设$h(x)\in C[-b,b]$，$Q_{\mu-\frac{1}{2}}=\sum_{m=1}^{S}|a_m|\cdot|\alpha_m|^{\mu-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\mu-\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{T}|b_n||\beta_n|^{\mu-\frac{1}{2}}<1$。则方程(4)按(7)求得的近似解$f_n(x)$与真解$f(x)$之差有估计：

$$\|f-f_n\|\leqslant\left(\frac{1+Q_{\mu-1/2}}{1-Q_{\mu-1/2}}\right)^2\cdot\inf_{\forall v_n\in V_n}\|f-v_n\| \tag{8}$$

证 由$Q_{\mu-1/2}<1$知$Q_\mu<1$，据定理1，方程(4)的连续解是适定的。记$\delta f=f-f_n$，$\delta v=f-v_n$，$v_n\in V_n$，$h_n=Lf_n$，$\delta h=h-h_n$。因$L\delta f=\delta h$，故

$$(\delta h,\delta f)=(L\delta f,\delta f)$$

$$=(\delta f,\delta f)-\sum_{m=1}^{S}a_m\alpha_m^{\mu}(\delta f(\alpha_m x),\delta f(x))-\sum_{n=1}^{T}b_n\beta_n^{\mu}\int_0^1 t^{\mu-1}(\delta f(\beta_n xt),\delta f(x))dt$$

于是，

$$\|\delta f\|^2=(\delta f,\delta f)$$

$$=\sum_{m=1}^{S}a_m\alpha_m^{\mu}(\delta f(\alpha_m x),\delta f(x))+\sum_{n=1}^{T}b_n\beta_n^{\mu}\int_0^1 t^{\mu-1}(f(\beta_n xt),\delta f(x))dt+(\delta h,\delta f)$$

$$\leqslant Q_{\mu-1/2}\|\delta f\|^2+\|\delta h\|\cdot\|\delta f\|,$$

故有$\|\delta f\|\leqslant\|\delta h\|/(1-Q_{\mu-1/2})$。由$(Lf_n,L\varphi_i)=(h,L\varphi_i)$和$(Lf,L\varphi_i)=(h,L\varphi_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$知$(L\delta f,L\varphi_i)=0$，从而对于V_n中的任意v_n有$(L\delta f,Lv_n)=0$，于是，

$$\|\delta f\|^2\leqslant\|\delta h\|^2/(1-Q_{\mu-1/2})^2=(L\delta f,L\delta f)/(1-Q_{\mu-1/2})^2$$

$$=(L\delta f,L\delta v)/(1-Q_{\mu-1/2})^2=[(\delta f,\delta v)-\sum_{m=1}^{S}a_m\alpha_m^{\mu}(\delta f(\alpha_m x),\delta v(x))$$

$$-\sum_{n=1}^{T}b_n\beta_n^{\mu}\int_0^1 t^{\mu-1}(\delta f(\beta_n xt),\delta v(x))dt-\sum_{m=1}^{S}a_m\alpha_m^{\mu}(\delta f(x),\delta v(\alpha_i x))$$

$$+\sum_{m\cdot n=1}^{S}a_m\alpha_m^{\mu}a_n\alpha_n^{\mu}(\delta f(\alpha_m x),\delta v(\alpha_n x))+\sum_{m=1}^{S}\sum_{n=1}^{T}a_m\alpha_m^{\mu}b_n\beta_n^{\mu}\int_0^1 t^{\mu-1}(\delta f(\beta_n xt),\delta v(\alpha_n x))dt$$

$$-\sum_{n=1}^{T}b_n\beta_n^{\mu}\int_0^1 t^{\mu-1}(\delta f,\delta v(\beta_n xt))dt+\sum_{m=1}^{S}\sum_{n=1}^{T}a_m\alpha_m^{\mu}b_n\beta_n^{\mu}\int_0^1 t^{\mu-1}(\delta f(\alpha_m x),\delta v(\beta_n xt))dt$$

$$+\sum_{m\cdot n=1}^{T}b_m\beta_m^{\mu}b_n\beta_n^{\mu}\left(\int_0^1 t^{\mu-1}\delta f(\beta_m xt)dt,\int_0^1 t^{\mu-1}\delta v(\beta_n xt)dt\right)\Big]/(1-Q_{\mu-1/2})^2$$

$$\leqslant[(1+Q_{\mu-1/2})/(1-Q_{\mu-1/2})]^2\cdot\|\delta f\|\cdot\|\delta v\|$$

故有$\|\delta f\|\leqslant[(1+Q_{\mu-1/2})/(1-Q_{\mu-1/2})]^2\inf_{\forall v_n\in V_n}\|f-v_n\|$，证毕。

若把近似解的构造条件(6)改为

$$(Lf_n,\varphi_i)=(h,\varphi_i),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则得到另一近似解，用类似于定理2的方法可得这个近似解的误差估计

$$\|f-f_n\|\leqslant[(1+Q_{\mu-1/2})/(1-Q_{\mu-1/2})]\inf_{\forall v_n\in V_n}\|f-v_n\|.$$

§2　波的有限传播法

例　第二类双曲方程组的标准型是

$$u_{xx}+2b_1u_{xy}+2v_{xy}=0,\quad 2b_3u_{xy}+2b_1v_{xy}+v_{yy}=0,\tag{H_2}$$

系数适合关系式$b_3=(b_1-1/2)^2\neq 0$，$b_1\neq 0$。(H_2)的一般解是

$$\begin{cases} u(x,y)=\dfrac{1}{2b_1}f_1(x-y)-\dfrac{1-2b_1}{2b_1}[xf_1'(x-y)+f_2(x-y)]+f_3(y) \\ v(x,y)=\dfrac{-b_3}{b_1}[xf_1'(x-y)+f_2(x-y)]+f_4(x) \end{cases}\tag{H_2^*}$$

在xy平面上考虑(H_2)适合条件

$$u|_{y=\alpha x}=\varphi_1(x),\quad u|_{y=0}=\varphi_2(x),\quad v|_{y=\alpha x}=\phi_1(x),\quad v|_{y=rx}=\phi_2(x),\quad \left|\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right|\leqslant 1\tag{9}$$

的解。假设数据φ_1、φ_2、ϕ_1、$\phi_2\epsilon c^{\mu}$，μ是适合

$$\left|\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)^{\mu-3/2}\right|+\left[\left|\frac{1-\alpha}{1-2b_1}\cdot\frac{1}{\alpha}\right|+\left|\frac{1-\alpha}{1-2b_1}\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)^{\mu-1/2}\right|\right]\Big/\left(\mu-\frac{1}{2}\right)<1$$

$$k\left[\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)^{k-1}\right]+\left[-\frac{1-\alpha}{1-2b_1}\frac{1}{\alpha}+\frac{1-\alpha}{1-2b_1}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)^{k}\right]\neq k,\quad k=0,1,\cdots,\mu-1$$

的正整数。由(H_2^*)及(9)得

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\alpha)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}[xf_1'((1-\alpha)x)+f_2((1-\alpha)x)]+f_3(\alpha x)=\varphi_1(x),\tag{10}$$

$$\frac{1}{2b_1}f_1(x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}[(xf_1'(x)+f_2(x)]+f_3(0)=\varphi_2(x),\tag{11}$$

$$\frac{-b_3}{b_1}[xf_1'((1-\alpha)x)+f_2((1-\alpha)x)]+f_4(x)=\phi_1(x),\tag{12}$$

$$\frac{-b_3}{b_1}[xf_1'((1-\gamma)x)+f_2((1-\gamma)x)]+f_4(x)=\phi_2(x).\tag{13}$$

从(11)—(13)消去f_2、f_4得函数微分方程

$$xf_1'(x)-\frac{r}{\alpha}xf_1'\left(\frac{1-\gamma}{1-\alpha}x\right)+\frac{1-\alpha}{1-2b_1}\frac{1}{\alpha}f_1(\xi)-\frac{1-\alpha}{1-2b_1}\frac{1}{\alpha}f_1\left(\frac{1-\gamma}{1-\alpha}x\right)$$

$$=\frac{b_1}{b_3}\frac{1-\alpha}{\alpha}\left[\phi_2\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\phi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)\right]+\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2\left(\frac{1-\gamma}{1-\alpha}x\right)}{(1-2b_1)/(2b_1)}\tag{14}$$

用上节方法求得(14)的近似解$f_1(x)\approx\omega(x)$。利用(10)—(12)得：

$$f_2(x)=\frac{-2b_1}{1-2b_1}\left[\varphi_2(x)-\frac{1}{2b_1}f_1(x)\right]-xf_1'(x)$$

$$f_3(x)=\varphi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\varphi_2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}x\right)+\frac{1-2b_1}{2b_1}xf_1'\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}x\right)$$

$$f_4(x)=\phi_1(x)+\frac{b_3}{b_1}\left\{\frac{-2b_1}{1-2b_1}\left[\varphi_2((1-\alpha)x)-\frac{1}{2b_1}f_1((1-\alpha)x)\right]+\alpha xf_1'((1-\alpha)x)\right\}$$

将f_i的近似值代入(H_2^*)得u、v的近似解。

$$
\begin{cases}
u(x,y)=\dfrac{1-2b_1}{2b_1}y[\omega'(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}y)-\omega'(x-y)]+\varphi_2(x-y)-\varphi_2(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}y)+\varphi_1(\dfrac{y}{\alpha}) \\
v(x,y)=\dfrac{2b_3}{1-2b_1}[\varphi_2(x-y)-\varphi_2((1-\alpha)x)+\dfrac{b_3}{b_1(1-2b_1)}[\omega((1-\alpha)x) \\
\qquad -\omega(x-y)]+\dfrac{b_3}{b_1}[\alpha x\omega'((1-\alpha)x)-y\omega'(x-y)]+\varphi_1(x)。
\end{cases}
$$

参考文献

[1] 华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，1979.

The Functional Integral Equations and the Method of Finite Propagation of Wave

Wu Ciqian　　Xuan Qiwo

We use the Galerkin method to solve the functional integral equations which appear in a class of hyperbolic problems in the plane. An error estimate formula of the method is given.

更　正

本刊1984年第4期第2页，式(1.4)中$\dfrac{1}{\rho(x,\bar{D}\setminus D)}$应为$\dfrac{\|x\|}{\rho(x,\bar{D}\setminus D)}$。