1988年第1期 中山大学学报 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI №. 1, 1988

·研究简报·

正态总体样本协差阵正定性一新证明

谢平民 陈图豪
（数学系）

摘 要

正态总体样本协差阵概率1正定的充要条件是总体样本容量大于总体维数[1]。本文从一个关于L-零测集的引理出发，对这一问题给出一个较之简洁清晰的新证明。

关键词 样本协差阵正定性

引理 记 $y=(y_{11},\cdots,y_{p1},\cdots,y_{1p},\cdots,y_{pp})$,

$$h(y)=\begin{vmatrix} y_{11}\cdots y_{1p}\\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ y_{p1}\cdots y_{pp}\end{vmatrix},\qquad H=\{y:h(y)=0\}$$

则H是$(R^{p^2},\mathscr{B}^{p^2})$上的$L$-零测集。

证 显然$h(y)$是$(R^{p^2},\mathscr{B}^{p^2})$上的可测函数，因而$H$是$(R^{p^2},\mathscr{B}^{p^2})$上的可测集。往证$H$是$L$-零测集。当$p=1$时，显然$H$是$(R,\mathscr{B})$上的$L$-零测集。设当$p=k$时命题成立，而当$p=k+1$时，则因$H$的$L$-测度可分解为

$$\int_H dy=\int_{\{Y_{11}=0\}\cap H}dy+\int_{\{Y_{11}\neq 0\}\cap H}dy,$$

其中Y_{j1}是$h(y)$中y_{j1}的代数余子式($j=1,\cdots,p$)。但是$\{Y_{11}=0\}$作为$(R^{k^2},\mathscr{B}^{k^2})$上的子集，按归纳法的假设，它是$L$-零测集，因而右端第一项积分为零。另方面，当$Y_{11}\neq 0$时，单点集上的积分

$$\int_{\{y_{11}=-\sum_{j=2}^{p}Y_{j1}y_{j1}/Y_{11}\}}dy_{11}=0,$$

从而依富比尼定理，第二项积分也为零。引理得证。

定理 设$\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(N)}$是$N_p(\mu,\Sigma)$的样本，其中$\mu,\Sigma>\square$都是未知的。记

$$\overline{\xi}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi^{(j)},\qquad S=\sum_{j=1}^{N}(\xi^{(j)}-\overline{\xi})(\xi^{(j)}-\overline{\xi})',$$

本文1987年3月收到

则S概率1正定的充要条件是$N>p$。

证明 取正交变换把S化为

$$S=\sum_{i=1}^{N-1}\eta^{(i)}\eta^{(i)\prime},$$

其中$\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(N-1)}$独立同分布$N_p(\square,\Sigma)$。记

$$B=(\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(N-1)})$$

则 $S=BB'$，且$\gamma kS=\gamma kB$.

设所考虑的概率空间为$(\Omega,\mathscr{F},P)$。若$N>p$，则$N-1\geqslant p$。因为增加B的列不会减少B的秩，故只须考虑$N-1=p$的情形。此时有

$$S=\sum_{i=1}^{p}\eta^{(i)}\eta^{(i)\prime}=BB',$$

其中B是$p\times p$阵。由于B的行列式值$|B|$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数，因而$\{\omega:|B(\omega)|=0\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测集。另方面，若记$\eta=(\eta^{(1)\prime},\cdots,\eta^{(p)\prime})$，则

$$\{|B|=0\}=\{\eta\epsilon H\}$$

并注意到H是$(R^{p^2},\mathscr{B}^{p^2})$上的$L$-零测集，即得

$$P\{|B|=0\}=P\{\eta\epsilon H\}=\int_H f(y)dy=0.$$

其中$f(y)$是$\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(p)}$的联合分布密度。由此可得

$$P\{\gamma kB=p\}=P\{|B|\neq 0\}$$
$$=1-P\{|B|=0\}=1.$$

充分性得证。必要性从略。

参 考 文 献

〔1〕 Dykstra. R. L., *Ann. Math. Statist.*, 41(1970), 2153—2154.
〔2〕 张尧庭、方开泰，多元统计分析引论，科学出版社，1982。

A New Proof of the Positive Definiteness on the Sample Covariance Matrix

Xie Pingmin   *Chen Tuhao*

Abstract

We give a new proof of the positive definiteness on the covariace matrix of the sample from the normal population. This proof is simpler and clearer than the original one, given in〔1〕.

Keywords sample covariance matrix positive definiteness