

# 二阶离散时间滤波器的相位偏离\*

陈 钧 量  
(电子学系)

## 摘 要

本文导出二阶离散时间滤波器相位偏离的计算公式。分析表明,当  $Q = \omega_0/\omega_b \gg 1$  和  $\omega_b, \omega_0 < 1$  时,在三分贝通带边频上,中心角频率  $\omega_0$  灵敏度  $S_x^{\cos\omega_0}$  较之  $3db$  带宽  $\omega_b$  灵敏度  $S_x^{\tan\frac{\omega_b}{2}}$  对相位偏离的影响大  $2/\omega_b\omega_0$  倍。最后,给出相位偏离统计变化的量度和计算例题。

**关键词** 离散时间滤波器, 相位偏离, 频率灵敏度

## 1 引言

近年来,人们对可实现高精度单片集成电路的开关电容滤波器(SCF)和数字滤波器(DF)的设计很感兴趣<sup>[1-4]</sup>,这些滤波器通称为离散时间滤波器(DTF)。P.E.Fleischer等人分析了二阶SCF的极点参数灵敏度<sup>[5]</sup>。最近,A.Nishihara提出用网络的频率参数 $\omega_0$ 和 $\omega_b$ 表征DTF的频率特性,讨论了二阶DTF幅度特性的灵敏度<sup>[6]</sup>。本文讨论二阶DTF相位偏离的计算,指出对窄带DTF在 $\omega = \omega_0$ 处出现相位偏离的最大值,并给出相位偏离统计变化的量度和计算例题。

## 2 相位偏离的计算

设二阶带通DTF的传递函数为<sup>[5,6]</sup>

$$H(z) = \frac{g_0(1-z^{-2})}{1+g_1z^{-1}+g_2z^{-2}} \quad (1)$$

式中 $g_i$ 为网络元件的函数。网络的频率特性为

本文于1988年1月收到

\*曾小林协助完成文中数值计算

$$H(e^{j\omega}) = \frac{jg_0(1 + \tan\frac{\omega_b}{2})\sin\omega}{\cos\omega - \cos\omega_0 + j\tan\frac{\omega_b}{2}\sin\omega} \quad (2)$$

式中 $\omega$ 已对采样频率归一化。中心角频率 $\omega_0$ 和3db带宽 $\omega_b$ 分别为

$$\cos\omega_0 = \frac{-g_1}{1+g_2} \quad (3a)$$

$$\tan\frac{\omega_b}{2} = \frac{1-g_2}{1+g_2} \quad (3b)$$

由式(2)得网络的相位特性

$$\phi(\omega) = \arg H(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1} \left( \frac{\tan\frac{\omega_b}{2}\sin\omega}{\cos\omega - \cos\omega_0} \right) \quad (4)$$

设相位函数 $\phi(\omega) = \phi(\omega_0, \omega_b)$ 的各偏导数都存在且连续, 则

$$d\phi(\omega) = \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\cos\omega_0} d\cos\omega_0 + \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\tan\frac{\omega_b}{2}} d\tan\frac{\omega_b}{2} \quad (5)$$

上式取近似值得

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\omega) &= \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\cos\omega_0} \Delta\cos\omega_0 + \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\tan\frac{\omega_b}{2}} \Delta\tan\frac{\omega_b}{2} \\ &= \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\cos\omega_0} \sum_i \frac{\partial\cos\omega_0}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\tan\frac{\omega_b}{2}} \sum_i \frac{\partial\tan\frac{\omega_b}{2}}{\partial x_i} \Delta x_i \end{aligned} \quad (6)$$

现定义

$$S_{\cos\omega_0}^{\phi(\omega)} = \cos\omega_0 \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\cos\omega_0} \quad \text{和} \quad S_{\tan\frac{\omega_b}{2}}^{\phi(\omega)} = \tan\frac{\omega_b}{2} \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\tan\frac{\omega_b}{2}} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)得

$$\Delta\phi(\omega) = \sum_i \left( S_{\cos\omega_0}^{\phi(\omega)} \cdot S_{x_i}^{\cos\omega_0} + S_{\tan\frac{\omega_b}{2}}^{\phi(\omega)} \cdot S_{x_i}^{\tan\frac{\omega_b}{2}} \right) \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (8)$$

式中,

$$S_{x_i}^{\cos\omega_0} = \frac{x_i}{\cos\omega_0} \cdot \frac{\partial\cos\omega_0}{\partial x_i}, \quad S_{x_i}^{\tan\frac{\omega_b}{2}} = \frac{x_i}{\tan\frac{\omega_b}{2}} \cdot \frac{\partial\tan\frac{\omega_b}{2}}{\partial x_i}$$

显然,  $S_{\cos\omega_0}^{\phi(\omega)}$  和  $S_{\tan\frac{\omega_b}{2}}^{\phi(\omega)}$  分别称为相位对网络频率参数 $\cos\omega_0$ 和 $\tan\frac{\omega_b}{2}$ 的灵敏度函数。

$S_{x_i}^{\cos\omega_0}$  和  $S_{x_i}^{\tan\frac{\omega_b}{2}}$  分别称为中心角频率和3db带宽的灵敏度, 统称为频率参数灵敏度, 它们仅与网络结构有关。例如, 对Fleischer和Laker<sup>[5]</sup>提出的SCF的E—线路和F—线路,

及最小电容分散的高Q值双二阶SCF<sup>[8]</sup>, 推导出频率参数灵敏度见表1.

由式(4)求得二阶带通DTF的相对对频率参数的灵敏度为

$$S_{\cos\omega_0}^{\phi(\omega)} = \frac{-\tan\frac{\omega_b}{2}\cos\omega_0\sin\omega}{(\cos\omega - \cos\omega_0)^2 + \tan^2\frac{\omega_b}{2}\sin^2\omega} \quad (9a)$$

$$S_{\tan\frac{\omega_b}{2}}^{\phi(\omega)} = \frac{-(\cos\omega - \cos\omega_0)\tan\frac{\omega_b}{2}\sin\omega}{(\cos\omega - \cos\omega_0)^2 + \tan^2\frac{\omega_b}{2}\sin^2\omega} \quad (9b)$$

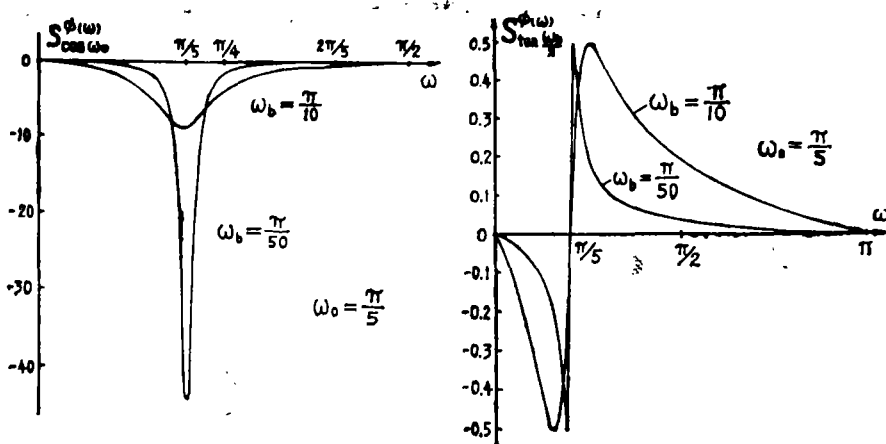


图1 相位频率参数灵敏度与归一化角频率的关系

Fig.1 phase sensitivity to the frequency parameter versus normalised angular frequency for different  $\omega_b$

图1表示式(9)当 $\omega_0 = \frac{\pi}{5}$ 、 $\omega_b = \frac{\pi}{10}$ 和 $\omega_b = \frac{\pi}{50}$ 时的曲线。结合式(8)可见,  $S_{\cos\omega_0}^{\phi(\omega)}$  对网络的相位偏离的影响比 $S_{\tan\frac{\omega_b}{2}}^{\phi(\omega)}$ 大得多, 比值 $\frac{\omega_0}{\omega_b} = Q$ 愈大, 相差愈大。

当 $\omega = \omega_0$ 时, 由式(8)和(9)得

$$\Delta\phi(\omega_0) = -\frac{1}{\tan\frac{\omega_b}{2}\tan\omega_0} \left( \sum_i S_{x_i}^{\cos\omega_0} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) \quad (10)$$

可知,  $\Delta\phi(\omega_0)$ 与 $S_{x_i}^{\tan\frac{\omega_b}{2}}$ 无关, 与乘积 $\tan\frac{\omega_b}{2} \cdot \tan\omega_0$ 成反比, 这不同于二阶带通RC有源滤波器的相位偏离与 $2Q$ 成正比<sup>[7]</sup>。若 $\omega_b, \omega_0 \ll 1$ 时, 式(10)可写为

$$\Delta\phi(\omega_0) = -\frac{2}{\omega_b\omega_0} \left( \sum_i S_{x_i}^{\cos\omega_0} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) \quad (11)$$

在三分贝通带上、下边频时, 即

表1 双二阶开关电容滤波器的频率参数灵敏度  
Tab.1 Frequency sensitivity of biquad SCF

灵敏度	电容	F-线路([8]中图2(a))	E-线路([8]中图2(b))	文献[8]中图2(c)
$S_x^{\cos\omega_0}$	A(CF <sub>2</sub> )	$-\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}$	$-\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}(1+\tan\frac{\omega_b}{2})$	$-\frac{1-\cos\omega_0}{2\cos\omega_0}[(1+\tan\frac{\omega_b}{2})\frac{C_2}{C_2+Cf_2}+(1-\tan\frac{\omega_b}{2})\frac{C_2}{C_2+Cf_2}]$
	B(C <sub>2</sub> )	$\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}(1-\tan\frac{\omega_b}{2})$	$\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}(1+\tan\frac{\omega_b}{2})$	$\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}(1+\tan\frac{\omega_b}{2})\frac{C_2}{C_2+Cf_2}$
	C(CB <sub>1</sub> )	$-\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}$	$-\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}$	$-\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}$
	D(C <sub>1</sub> )	$\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}$	$\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}(1+\tan\frac{\omega_b}{2})$	$\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}$
	F/E(CB <sub>2</sub> )	$\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}\tan\frac{\omega_b}{2}$	$-\frac{1-\cos\omega_0}{\cos\omega_0}\tan\frac{\omega_b}{2}$	—
	CB' <sub>2</sub>	—	—	$-\frac{1-\cos\omega_0}{2\cos\omega_0}[(1+\tan\frac{\omega_b}{2})\frac{C_2}{C_2+Cf_2}-(1-\tan\frac{\omega_b}{2})\frac{C_2}{C_2+Cf_2}]$
$S_x^{\tan\frac{\omega_b}{2}}$	A(CF <sub>2</sub> )	0	$1+\tan\frac{\omega_b}{2}$	$\frac{1-\tan^2(\frac{\omega_b}{2})}{2\tan\frac{\omega_b}{2}}\left(\frac{Cf_2}{C_2+Cf_2}\right)$
	B(C <sub>2</sub> )	$-(1-\tan\frac{\omega_b}{2})$	$-(1+\tan\frac{\omega_b}{2})$	$-(1+\tan\frac{\omega_b}{2})\frac{C_2}{C_2+Cf_2}$
	C(CB <sub>1</sub> )	0	0	0
	D(C <sub>1</sub> )	0	$-(1+\tan\frac{\omega_b}{2})$	0
	F/E(CB <sub>2</sub> )	$1-\tan\frac{\omega_b}{2}$	$1+\tan\frac{\omega_b}{2}$	—
	CB' <sub>2</sub>	—	—	—

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\omega_b}{2}, \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega_b} \gg 1$$

设  $\omega_b, \omega_0 < 1$ , 由式(8)和(9)得

$$\Delta\phi(\omega_1) = \frac{1}{2} \sum_i S_{x_i}^{\tan \frac{\omega_b}{2}} \frac{\Delta x_i}{x_i} - \frac{1}{\omega_b \omega_0} \sum_i S_{x_i}^{\cos \omega_0} \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (12a)$$

$$\Delta\phi(\omega_2) = - \left( \frac{1}{2} \sum_i S_{x_i}^{\tan \frac{\omega_b}{2}} \frac{\Delta x_i}{x_i} + \frac{1}{\omega_b \omega_0} \sum_i S_{x_i}^{\cos \omega_0} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) \quad (12b)$$

观察式(12)可知, 在三分贝通带上、下边频时, 灵敏度  $S_x^{\cos \omega_0}$  较之  $S_x^{\tan \frac{\omega_b}{2}}$  对相位偏离  $\Delta\phi$  的影响大  $2/\omega_b \omega_0$  倍。这结论与二阶带通RC有源滤波器大2Q倍也不相同<sup>[7]</sup>,

应当指出, 对于二阶低通和高通滤波器的传递函数<sup>[5]</sup>

$$H_L(z) = \frac{g_0 z^{-1}}{1 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}} \text{ 和 } H_H(z) = \frac{g_0 (1 - z^{-1})^2}{1 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}$$

其相位函数为

$$\phi_L(\omega) = \phi_H(\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{\tan \frac{\omega_b}{2} \sin \omega}{\cos \omega - \cos \omega_0} \right) \quad (13)$$

根据式(7)定义, 故式(9)对二阶低通和高通DTF也是适用的。

可以证明, 当  $\omega_b \ll 1$  时,  $\Delta\phi(\omega)$  的峰值出现在  $\omega = \omega_0$  处, 此时

$$\Delta\phi_{\max} = \Delta\phi(\omega_0) = -\frac{1}{\tan \frac{\omega_b}{2} \tan \omega_0} \left( \sum_i S_{x_i}^{\cos \omega_0} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) \quad (14)$$

### 3 统计变化的量度

设随机变量  $\frac{\Delta x_i}{x_i}$  的平均值为  $\mu_i$ , 方差为  $\sigma_i^2$ , 及  $\rho_{ij}$  是  $\frac{\Delta x_i}{x_i}$  和  $\frac{\Delta x_j}{x_j}$  之间的相关系数。由式(8)和(9)得相位偏离的平均值和方差分别为

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta\phi} = E[\Delta\phi(\omega)] = & \frac{\tan \frac{\omega_b}{2} \sin \omega}{(\cos \omega - \cos \omega_0)^2 + \tan^2 \frac{\omega_b}{2} \sin^2 \omega} \left[ (\cos \omega_0 - \cos \omega) \sum_i S_{x_i}^{\tan \frac{\omega_b}{2}} - \right. \\ & \left. - \cos \omega_0 \sum_i S_{x_i}^{\cos \omega_0} \right] \mu_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \text{Var}[\Delta\phi(\omega)] = \left[ \frac{\tan \frac{\omega_b}{2} \sin \omega}{(\cos \omega - \cos \omega_0)^2 + \tan^2 \frac{\omega_b}{2} \sin^2 \omega} \right]^2$$

$$\times \left\{ \sum_i \left[ (\cos \omega_0 - \cos \omega) S_{x_i}^{\tan \frac{\omega_b}{2}} - \cos \omega_0 S_{x_i}^{\cos \omega_0} \right]^2 \sigma_i^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \left\{ (\cos \omega_0 - \cos \omega)^2 S_{x_i}^{\tan \frac{\omega_b}{2}} \cdot S_{x_j}^{\tan \frac{\omega_b}{2}} + \cos^2 \omega_0 S_{x_i}^{\cos \omega_0} S_{x_j}^{\cos \omega_0} - \right. \\
 &\left. - (\cos \omega_0 - \cos \omega) \cos \omega_0 (S_{x_i}^{\cos \omega_0} \cdot S_{x_j}^{\tan \frac{\omega_b}{2}} + S_{x_i}^{\tan \frac{\omega_b}{2}} \cdot S_{x_j}^{\cos \omega_0}) \right\} \sigma_i \sigma_j \} \quad (16)
 \end{aligned}$$

**例题** 对于文献[8]图2三种低通阻带SCF结构的设计例题, 计算: (a) 在极点频率  $f_p = 1\text{KHZ}$  和  $f_{1,2} = f_p \pm f_b$  时相位偏离值. (b) 在极点频率  $\omega_p = \omega_0$  时相位偏离统计量.

解:

(a) 首先算出归一化极点频率和三分贝带宽为

$$\begin{aligned}
 \omega_p &= 2\pi \frac{f_p}{f_c} = \frac{2\pi}{12.5} = 0.5027 \\
 \omega_b &= \frac{\omega_p}{Q} = \frac{0.5027}{30} = 0.01676
 \end{aligned}$$

根据表1, 便可计算三种滤波器结构的  $S_x^{\cos \omega_0}$  和  $S_x^{\tan \frac{\omega_b}{2}}$  的数值见表2.

表2 文献[8]图2设计例题的频率参数灵敏度值

Tab.2 The values of frequency sensitivity of design example of Fig.2 in [8]

灵敏度	电 容	图 2 (a)	图 2 (b)	图 2 (c)
$S_x^{\cos \omega_0}$	CF <sub>2</sub>	-0.14115	-0.14234	-0.10656
	C <sub>2</sub>	0.13997	0.14234	0.07314
	CB <sub>1</sub>	-0.14115	-0.14115	-0.14115
	C <sub>1</sub>	0.14115	0.14234	0.14115
	CB <sub>2</sub>	$1.18 \times 10^{-3}$	$-1.18 \times 10^{-3}$	---
	CB <sub>2</sub> '	---	---	0.03342
$S_x^{\tan \frac{\omega_b}{2}}$	CF <sub>2</sub>	0	1.0084	29.0126
	C <sub>2</sub>	-0.99162	-1.0084	-0.51815
	CB <sub>1</sub>	0	0	0
	C <sub>1</sub>	0	-1.0084	0
	CB <sub>2</sub>	0.99162	1.0084	---
	CB <sub>2</sub> '	---	---	-28.4945

MOS电容器的相对误差为<sup>[9]</sup>

$$\frac{\Delta C}{C} = \sqrt{K_0} \cdot C^{-\frac{1}{2}}$$

式中  $K_0$  是电容器的氧化物效应因子 (见文献[9]式(23)). 为避免电容器生产过程引起的相关性的系统误差, MOS电容器常用多个较小值的“单位电容器”  $C_u$  并联组成, 则对

任意电容器  $C_i = k_i C_u$ , 其中  $k_i$  为倍数。由此得出任意电容器的相对偏差为

$$\frac{\Delta C_i}{C_i} = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \left( \frac{\Delta C_u}{C_u} \right)$$

现设  $\frac{\Delta C_u}{C_u} = 1\%$ , 由文献[8]设计例题的结果, 已知  $k_i$  值, 根据式(10)和(12), 计算相位偏离值见表 3。

(b) 我们定义任意电容器  $C_i$  的期望电容误差为<sup>[9]</sup>

$$\Delta C_i = \left( \sigma_{c_i}^2 \right)^{1/2}$$

式中  $\sigma_{c_i}^2$  是  $C_i$  的方差。设电容相对误差的均值为零, 即  $\mu_{\frac{\Delta C_i}{C_i}} = \mu_i = 0$ , 则电容相对误差的

方差为

$$\sigma_{\frac{\Delta C_i}{C_i}}^2 = \sigma_i^2 = E\left[\left(\frac{\Delta C_i}{C_i}\right)^2\right] = \frac{1}{C_i^2} E[(\Delta C_i)^2] = \frac{1}{k_i} \sigma_u^2$$

式中  $\sigma_u^2 = \text{Var}\left[\frac{\Delta C_u}{C_u}\right]$ 。由式(15)得  $\mu_{\Delta\phi(\omega_0)} = 0$ 。

现设  $\sigma_u = 1\%$ , 由已计算频率参数灵敏度数值表 2 和已知  $k_i$  值<sup>[8]</sup>, 代入式(16), 经计算得结果见表 3。

表 3 文献[8]图 2 设计例题的相位偏离及其标准差

Tab.3 Phase deviation and its standard deviation of design example of Fig.2 in[8]

滤波器结构	相位偏离(度)			标准差 $\sigma_{\Delta\phi(\omega_0)}$ 度		
	$\Delta\phi(\omega_0)$	$\Delta\phi(\omega_1)$	$\Delta\phi(\omega_2)$	$\rho_{ij} = 1$	$\rho_{ij} = 0.5$	$\rho_{ij} = 0$
图 2 (a)	6.02	3.54	3.05	6.02	16.04	21.83
图 2 (b)	4.61	2.81	2.24	4.61	10.51	14.12
图 2 (c)	5.19	2.76	2.92	5.19	17.18	23.73

从表 3 可知: (1) 当  $\rho_{ij} = 1$  时,  $\sigma_{\Delta\phi(\omega_0)}$  为最小, 当  $\rho_{ij} = 0$  时,  $\sigma_{\Delta\phi(\omega_0)}$  为最大。(2) 当  $\rho_{ij} = 1$  时,  $\sigma_{\Delta\phi(\omega_0)}$  值与  $\Delta\phi(\omega_0)$  相同。(3) 当  $\rho_{ij} = 1$  时, 最小电容分散的高 Q 值结构图 2 (c) 的  $\sigma_{\Delta\phi(\omega_0)}$ , 虽然比中等电容分散高 Q 值结构图 2 (b) 略大, 但比大电容分散高 Q 值结构图 2 (a) 小, 这说明图 2 (c) 结构从相位偏离的标准差  $\sigma_{\Delta\phi(\omega_0)}$  大小考虑也是可取的。

## 4 结论

本文推导了二阶离散时间波滤波器相位偏离的计算公式, 表明相位偏离的计算与网络频率参数灵敏度相联系。指出当  $Q = \frac{\omega_0}{\omega_b} \gg 1$  和  $\omega_b, \omega_0 < 1$  时, 在三分贝通带边频上,  $S_x^{\cos\omega_0}$

较之 $S_x^{\tan \omega_b}$ 对相位偏离的影响大 $2/\omega_b \omega_0$ 倍。在中心频率时,相位偏离的大小与 $2/\omega_b \omega_0$ 成比例。这些结果与二阶RC有源滤波器是不同的。

指出窄带带通滤波器( $\omega_b \ll 1$ )在中心频率处出现相位偏离的最大值。最后,给出相位偏离统计变化的量度和计算例题。

### 参 考 文 献

- [1] G.C. Temes, H.J. Orchard and M. Jahanbegloo, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-25(1978), 1039-1044.
- [2] R.W. Broderson, P.R. Gray and D.A. Hodges, *Proc. IEEE*, 67 (1979), 61-75.
- [3] N. Attaie and E.I.El-Masry, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-30 (1983), 865-872.
- [4] E.S.K. Liu, L.E. Turner and L.T. Bruton, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-31 (1984), 369-381.
- [5] P.E. Fleischer and K.R. Laker, *Bell Syst. Tech. J.*, 58(1979), 2235-2269.
- [6] A. Nishihara, *Electron. Lett.*, 19 (1983), 84-86.
- [7] 陈钧量, 中山大学学报(自然科学版), 1981, 4, 32-37.
- [8] G. Fischer and G.S. Moschytz, *Electron. Lett.*, 18 (1982), 1087-1089.
- [9] J.B. Shyu and G.C. Temes, *IEEE J. Solid-State Circuits*, SC-17 (1982), 1070-1075.

## Deviation of Phase of Second-Order Discrete-Time Filters

Chen Junliang

### Abstract

A formula of deviation of phase of second-order discrete-time filters is derived. It is shown that the effect of sensitivities  $S_x^{\cos \omega_0}$  on deviation of phase is larger  $2/\omega_b \omega_0$  than  $S_x^{\tan \omega_b}$  at the 3db passband edge frequencies for  $Q = \omega_0/\omega_b \gg 1$  and  $\omega_b, \omega_0 < 1$ . Finally, the measurements of statistic variation of the deviation of phase and an example are given.

**Keywords** discrete-time filter, deviation of phase, frequency sensitivity