

# 在钢模内薄壁钢管弹塑性极限载荷的计算

郭金基            郭勉群 袁树森  
(中山大学力学系)      (广州荔湾钢管厂)

## 摘 要

研究在轴向压力、内压力、挤压力和摩擦力作用下钢模内薄壁钢管弹、塑性变形和内力, 计算钢管弹、塑性极限载荷, 并讨论钢管和钢模间摩擦系数对极限载荷的影响。最后给出算例。

**关键词** 薄壁钢管, 弹、塑性极限载荷, 塑性全量理论

本文研究薄壁钢管在钢模内挤压、冷拉塑性成型三通管为背景的前期阶段弹、塑性变形和内力。如图1所示, 钢管除受轴向压力、内压力作用外, 还受钢模的挤压力和钢模与钢管之间轴向摩擦力作用。

## 1 钢模和钢管弹性变形的计算公式

钢模看作厚壁圆筒, 它和薄壁钢管均属于三维轴对称变形问题。选取柱坐标 $r, \epsilon, z$ ;  $z$ 轴与筒(管)轴线重合(见图1), 并作如下假定: 设圆筒和钢管很长, 在轴对称载荷作用下, 它们的整个截面轴向应变相同, 即 $\epsilon_z = \epsilon_{z0}$ ; 应力在两端满足圣维南边界条件, 即

$$P_1 = \iint_{S_1} \sigma_z ds, \quad P_2 = \iint_{S_2} \sigma_z ds \quad (1)$$

其中 $P_1$ 、 $P_2$ 分别为钢管和钢模的轴向合力;  $S_1$ 、 $S_2$ 分别为截面积。

应变与位移的几何方程为

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = u/r, \quad \epsilon_z = \epsilon_{z0} \quad (2)$$

其中 $u$ 为径向位移。

本文1987年8月15日收到

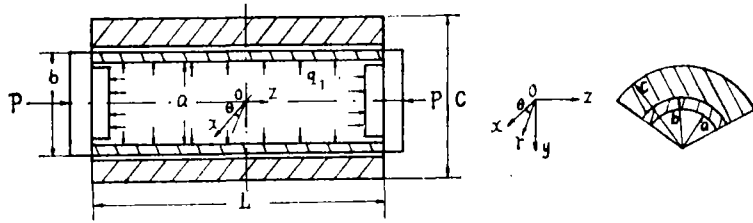


图 1

忽略体力并假设剪应变  $\gamma_{rz} = 0$  的厚壁圆筒，在内压力  $q_2$  和轴向合力  $P_2$  作用下（见图 2），文〔1〕求得弹性的径向、切向及轴向应力，依次记为  $\sigma_{r_2}$ 、 $\sigma_{\theta_2}$  及  $\sigma_{z_2}$ 。再由广义虎克定律，将应力与应变关系式代入 (2) 式，并将  $\sigma_{z_2}$  代入 (1) 式积分，整理后可得

$$E_2 u_2 / r = \frac{b^2}{c^2 - b^2} \left( 1 + \frac{c^2}{r^2} \right) q_2 - \frac{\nu_2 b^2}{c^2 - b^2} \left( 1 - \frac{c^2}{r^2} \right) q_2 - \nu_2 \sigma_{z_2} \quad (3)$$

式中  $b, c$  分别为厚壁圆筒内、外径； $E_2$  为杨氏模量； $\nu_2$  为泊松比； $\sigma_{z_2} = -P_2 / \pi (c^2 - b^2)$ 。

薄壁钢管在内压力  $q_1$ 、挤压力  $q_2$  及轴向力  $P_1$  同时作用下（见图 3），设管壁很薄，忽略高一级小量后，其弹性解为：

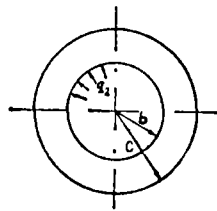


图 2

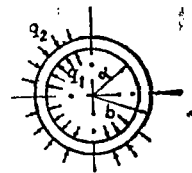


图 3

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_1} &= -q_1 + (a/t)\rho(q_1 - q_2) \\ \sigma_{\theta_1} &= (a/t)(q_1 - q_2) + (q_1 - 2q_2) - (a/t)\rho(q_1 - q_2) \\ \sigma_{z_1} &= \nu_1 [(a/t)(q_1 - q_2) - 2q_2] + E_1 \epsilon_{z_{10}} = -P_1 / 2\pi a t \\ E_1 u_1 / r &= (a/t)(q_1 - q_2) + (q_1 - 2q_2) - (a/t)\rho(q_1 - q_2) \\ &\quad - \nu_1 [-q_1 + a/t\rho(q_1 - q_2)] - \nu_1 \sigma_{z_1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中  $\rho = (r - a) / a$ ， $t = b - a$ ， $0 \leq \rho \leq t/a$ ， $a, b$  分别为钢管内、外径； $E_1$  为钢管杨氏模量， $\nu_1$  为泊松比。

设钢模与钢管紧密接触，在  $r = b (\rho = t/a)$  处必须满足应力和位移的连续条件，同时钢管内壁及钢模外壁应满足应力边界条件，归结为

$$\text{当 } r = r (\rho = 0) \text{ 时, } \sigma_{r_1} = -q_1; \quad \text{当 } r = b (\rho = t/a) \text{ 时, } \sigma_{r_1} = -q_2 = \sigma_{r_2} \quad (5)$$

$$\text{当 } r = b (\rho = t/a) \text{ 时, } u_1 = u_2 \quad (6)$$

将 (3)，(4) 式代入 (6) 式化简后得到

$$q_2 = \left[ \frac{1}{E_1} \frac{a}{t} q_1 + \frac{\nu_1}{E_1} \frac{P_1}{2\pi at} - \frac{\nu_2}{E_2} \frac{P_2}{\pi(c^2 - b^2)} \right] / \left[ \frac{1}{E_1} \left( \frac{a}{t} + 1 - \nu_1 \right) + \frac{\nu_2}{E_2} + \frac{b^2 + c^2}{E_2(c^2 - b^2)} \right] \quad (7)$$

若设钢模与钢管之间摩擦力均匀分布, 作用于钢管与钢模的轴向外载荷分别为  $P$  及  $P^*$ , 由平衡条件可得作用于它们的轴向合力分别为

$$P_1 = P - \pi a^2 q_1 - \mu(\pi b L) q_2, \quad P_2 = P^* + \mu(\pi b L) q_2 \quad (8)$$

其中  $L$  为钢管(模)接触长度;  $\mu$  为钢模与钢管之间的静摩擦系数, 容后讨论。

把(8)式代入(7)式可得

$$q_2 = \frac{\frac{a}{t} q_1 + \frac{\nu_1 P}{2\pi at} - \frac{\nu_1 a}{2t} q_1 - \frac{E_1 \nu_2 P^*}{E_2 \pi(c^2 - b^2)}}{\left( \frac{a}{t} + 1 - \nu_1 \right) + \frac{E_1}{E_2} \nu_2 + \frac{E_1(b^2 + c^2)}{E_2(c^2 - b^2)} + \mu b L \left[ \frac{\nu_1}{2at} + \frac{E_1 \nu_2}{E_2(c^2 - b^2)} \right]} \quad (9)$$

## 2 薄壁钢管的弹、塑性极限载荷

薄壁钢管的加载有多种方式, 本文讨论较普遍使用的一种:  $q_1$  给出某一高压值, 轴向载荷  $P$  由给定的初值逐渐增加使钢管的内壁应力从弹性状态达到屈服条件, 此时的轴向载荷称为弹性极限载荷, 记为  $P_e$ 。

假设薄壁钢管为理想塑性材料(下同), 现在分别采用 Mises 和 Tresca 屈服条件计算  $P_e$ 。依据文[2]、[3] Mises 屈服条件为

$$(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_s = 2 / \sqrt{3 + \mu_\sigma^2} \quad (10)$$

其中  $\sigma_s$  为材料屈服极限;  $\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$  称为 Lode 参数,  $-1 \leq \mu_\sigma \leq +1$  可由实验确定。

由(4)式易见, 钢管处于三向应力状态, 内壁应力为最大。其主应力依次为:  $\sigma_1 = \sigma_{\theta_1}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{r_1}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{z_1}$ , 由(4)式令  $\rho = 0$  ( $r = a$ ) 而求得。将它们代入(10)式, 再利用(8)、(9)式消去  $q_2$  可得到

$$\left( 1 - \frac{B_e \nu_1}{A_e 2\pi at} \right) P_e = \frac{4}{(3 + \mu_\sigma^2)^{1/2}} \sigma_s (\pi at) - \pi a^2 q_1 - 2\pi at q_1 + \frac{B_c}{A_c} \left( 1 - \frac{\nu_1}{2} \right) \frac{a}{t} q_1 - \frac{B_e}{A_e} \frac{\nu_2}{E_2} E_1 \frac{P}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中 } A_e = & \left( \frac{a}{t} + 1 - \nu \right) + \frac{E_1}{E_2} \nu_2 + \frac{E_1(b^2 + c^2)}{E_2(c^2 - b^2)} + \mu b L \left[ \frac{\nu_1}{2at} + \frac{E_1 \nu_2}{E_2(c^2 - b^2)} \right] \\ B_e = & 2\pi a^2 + 4\pi at + \mu \pi b L \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

依据文[2]、[3], Tresca 屈服条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \quad (13)$$

同样先求出内壁主应力代入上式,再利用(8),(9)式消去 $q_2$ 可得到

$$\left(1 - \frac{B_e}{A_e} \frac{\nu_1}{2\pi at}\right) P_e = 2\sigma_s(\pi at) - \pi a^2 q_1 - 2\pi at q_1 + \frac{B_e}{A_e} \left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) \frac{a}{t} q_1 - \frac{B_e}{A_e} \frac{\nu_2}{E_2} E_1 \frac{P^*}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (14)$$

当薄壁管内壁达到屈服应力后,随着载荷 $P$ 和内压力 $q_1$ 按一定比例的增加,弹性区域从内壁向外壁方向逐渐减小,塑性区域则从内壁向外壁方向逐渐扩大,直至外壁达到屈服应力状态。钢管进入塑性流动状态,此时对应的轴向载荷 $P$ ,称为塑性极限载荷,记为 $P_e^*$ 。

依据(4)式先求出钢管外壁 $\rho = t/a$  ( $r = b$ )处的主应力,依次记为 $\sigma_1 = \sigma_\theta$ ,  $\sigma_2 = \sigma_r$ , 及 $\sigma_3 = \sigma_z$  将它们代入(10)式并消去 $q_2$ 可得满足Mises屈服条件的塑性极限载荷 $P_e^*$

$$\left(1 - \frac{B_e^* \nu}{A_e 2\pi at}\right) P_e^* = \frac{4}{\sqrt{3 + \mu_\sigma}} \sigma_s(\pi at) - \pi a^2 q_1 + \frac{B_e^*}{A_e} \left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) \frac{a}{t} q_1 - \frac{B_e^*}{A_e} \frac{E_1}{E_2} \nu_2 \frac{P^*}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (15)$$

同理,可由(13)式得到满足Tresca屈服条件的塑性极限载荷 $P_e^*$

$$\left(1 - \frac{B_e^* \nu}{A_e 2\pi at}\right) P_e^* = 2\sigma_s(\pi at) - \pi a^2 q_1 + \frac{B_e^*}{A_e} \left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) \frac{a}{t} q_1 - \frac{B_e^*}{A_e} \frac{E_1}{E_2} \nu_2 \frac{P^*}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (16)$$

$$\text{式中} \quad B_e^* = 2\pi a^2 + 2\pi at + \mu \pi b L \quad (17)$$

### 3 用全量理论计算理想塑性材料的极限载荷

用塑性力学的全量理论计算塑性极限载荷。薄壁钢管受力如前,其主应力依次为 $\sigma_\theta > \sigma_r > \sigma_z$ ,按Tresca屈服条件,应满足(13)式和端面的圣维南条件(1)及在区域内的平衡方程

$$(d\sigma_r/dr) + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0 \quad (18)$$

应用全量理论,应力与应变满足的本构关系为

$$\left. \begin{aligned} S_{ii} &= \frac{2}{3} \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}) / \bar{\epsilon} \cdot e_{ij} \\ \sigma_{kk} &= (E_1/(1-2\nu_1)) \cdot \epsilon_{kk} \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \\ \sigma &= \left(\frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}\right)^{1/2}, \quad \epsilon = \left(\frac{2}{3} e_{ij} \cdot e_{ij}\right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

这里引进张量记号,下标相同表示求和; $\delta_{ij}$ 为克罗内克尔符号(当 $i=j$ 时, $\delta_{ij}=1$ ,当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij}=0$ ).

在塑性应力状态下,仍要求满足边界条件(5),把式(13)及(1)代入(18),求解微分方程可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (1/\rho) \left[ -q_1 + \frac{a}{t} \rho (q_1 - q_2) - q_2 \rho \right] \\ \sigma_\theta &= (a/t)(q_1 - q_2) - q_2 \\ \sigma_z &= -P_1/2\pi at \\ P_1/2\pi at &= \sigma_s + \frac{a}{t} (q_2 - q_1) + q_2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 $\rho$ 的定义如同(4)式, $0 \leq \rho \leq t/a$ ,  $\rho = (r-a)/a$

依据塑性力学的基本假设<sup>[2]</sup>,对于理想塑性材料,在轴向均匀压力下, $\varepsilon_z = -\varepsilon_0$ , $\varepsilon_r \approx \varepsilon_\theta \approx \varepsilon_0/2$ ,则(19)式中应变强度 $\bar{\varepsilon}$ 和应力强度 $\bar{\sigma}$ 经计算可得

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma_s \quad (21)$$

在塑性状态下,应变仍满足几何方程(2)式.设薄壁钢管是不可压缩的材料,体应变为零,这时 $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$ .将(2),(21)及(19)式代入此式得

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = -\frac{\varepsilon_0}{2\sigma_s} (\sigma_z - \sigma_s) + \frac{\varepsilon_0}{2\sigma_s} \sigma_r$$

经过积分运算,再由式(19),(2)导出的 $u$ 相比较确定积分常数,可得

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2\sigma_s} \left( \frac{-P_1 + \sigma_s + q_1}{2\pi at} \right) a + \frac{\varepsilon_0}{2} a(1+\rho) \quad (0 \leq \rho \leq t/a) \quad (22)$$

钢模仍处于弹性应力状态,径向位移 $u_2$ 仍用(3)式表示.当 $r=b$ ( $\rho=t_1/a$ )时,应满足位移连续条件(6)式,将(22)及(3),(8)代入,经过化简可得

$$q_2 = \frac{\frac{\varepsilon_0 E_2}{2\sigma_s} \frac{b}{a} \left( \frac{a}{2t} + 1 \right) q_1 - \frac{\varepsilon_0 E_2}{4\pi at \sigma_s} \frac{b}{a} P + \frac{\varepsilon_0 E_2}{2} \left( \frac{b}{a} + 1 \right) - \frac{2P}{\pi(c^2 - b^2)}}{v_2 + \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \mu b L \left( \frac{v_2}{c^2 - b^2} - \frac{\varepsilon_0 E_2 b}{\sigma_s 4a^2 t} \right)} \quad (23)$$

将(23),(8)代入(20)第4式,可以计算出塑性状态的轴向载荷,并记为 $P_s$

$$B_s P_s = \sigma_s - \frac{a}{2t} q_1 + \left( \frac{a}{t} + 1 + \frac{bL}{2at} \mu \right) \frac{1}{A_s} \left[ \frac{\varepsilon_0 E_2}{2\sigma_s} \frac{b}{a} \left( \frac{a}{2t} + 1 \right) q_1 + \frac{\varepsilon_0 E_2}{2} (1 + b/a) - \frac{vP^*}{\pi(c^2 - b^2)} \right] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad A_s &= v_2 + \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \mu b L \left( \frac{v_2}{c^2 - b^2} - \frac{\varepsilon_0 E_2}{4\sigma_s} \cdot \frac{b}{a^2 t} \right) \\ B_s &= \frac{1}{2\pi at} + \frac{\varepsilon_0 E_2}{\sigma_s} \cdot \frac{1}{A_s} \cdot \frac{b}{4\pi a^2 t} \left( \frac{a}{t} + \frac{bL}{2at} \mu \right) \end{aligned} \quad (25)$$

当确定内压力 $q_1$ 后,(23),(24)及(25)式可以计算由全量理论导出的挤压力 $q_2$ 和极

限载荷 $P_s$ , 进而计算钢管的应力, 并讨论摩擦力对 $P_s$ 的影响。

#### 4 算例及结果讨论

例 设薄壁钢管为理想塑性材料,  $\sigma_s = 2 \times 10^3 \text{kg/cm}^2$ , 由单向均匀压力试验给出材料的 $\epsilon_0 = \sigma_s/E_1$ , 杨氏模量 $E_1 = 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ , 泊松比 $\nu_1 = 1/2$ ; 钢模的弹性模数与之相同。几何尺寸 $a = 24.5 \text{mm}$ ,  $b = 30 \text{mm}$ ,  $c = 42 \text{mm}$ ,  $L = 150 \text{mm}$  (见图1)。当给定内压力 $q_1 = 350 \text{kg/cm}^2$ ,  $P^* = 0$ 时, 试选择不同的摩擦系数 $\mu$ 分别用Tresca屈服条件及全量理论计算塑性极限载荷 $P_e^*$ 及 $P_s$ 。

计算过程于下: (1)塑性极限载荷 $P_e^*$  依据给出的数据代入(12), (17)式计算 $A_e$ ,  $B_e^*$ 得  $A_e = 8.537875 + 10.952961\mu$ ,  $B_e^* = 46.181412 + 141.370\mu$ 。

用Tresca屈服条件计算塑性极限载荷 $P_e^*$ 。由(16)式将 $A_e$ ,  $B_e^*$ ,  $q_1$ 和 $\sigma_s$ 代入可得

$$\left(1 - \frac{B_e^*}{A_e}\right) \times 0.0590556 P_e^* = 10333.09 + \frac{B_e^*}{A_e} \times 1169.32$$

选取不同的摩擦系数 $\mu$ 代入上式得到的 $P_e^*$ 值列于表1。

(2)用全量理论计算 $P_s$  依据给出的数据代入(25)式得 $A_s = 3.58333 - 7.618846\mu$ ,  $B_s = 0.11811 + 0.072313 \times (5.454545 + 16.69759\mu)/A_s$ 。

将 $q_1$ ,  $\sigma_s$ 代入(24)式, 可得载荷 $P_s$ 。选取不同的摩擦系数 $\mu$ 的计算结果列于表1, 并与 $P_e^*$ 相比较。

表1 列出在不同的摩擦系数 $\mu$ 下的 $P_s$ 和 $P_e^*$ 计算值

Tab. 1 lists the Calculating values of  $P_e^*$  and  $P_s$  for different frictional coefficient  $\mu$ .

| $\mu$              | 0.1      | 0.12     | 0.15     | 0.18     | 0.20     | 0.25     | 0.30     |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $P_e^*(\text{kg})$ | 28013.68 | 28685.01 | 29670.85 | 30632.16 | 31259.85 | 32784.81 | 34249.52 |
| $P_s(\text{kg})$   | 28544.99 | 29261.48 | 30316.98 | 31350.21 | 32026.98 | 33678.34 | 35273.49 |

根据以上导出的公式、算例及实验结果可以看出:

①钢模与钢管之间的摩擦作用对塑性成型钢制三通管影响较大。表中摩擦系数 $\mu$ 从0.1增加到0.3时,  $P_e^*$ 增大22.3%,  $P_s$ 增大23.6%, 已为实验所证实。例如: 当钢模与钢管间加滑润剂时, 以塑性流动压缩率某到某一规定值测得的载荷定义为极限载荷 $P_s = 28500 \text{kg}$ 及表中 $\mu = 0.1$ 的计算值很接近。而钢模与钢管间不加滑润剂时塑性流动载实测高达35000kg, 与表中的 $\mu = 0.30$ 计算结果大致相同。摩擦系数 $\mu$ 比文[4]给出的值大了近一倍, 我们认为这是由于钢管属软质金属材料, 挤压过程表面温度高, 与模具接触面温度大及表面粗糙度不同所引起的。②钢管材料的屈服应力 $\sigma_s$ 对塑性极限载荷影响显著, 例如将管材从不锈钢改用低碳钢,  $\sigma_s$ 从2000kg/cm<sup>2</sup>变为2800kg/cm<sup>2</sup>时, 塑性极

限载荷 $P_s$ 从28544.99kg提高到38677.06(取 $\mu=0.1$ ,  $q_1=350\text{kg/cm}^2$ 按(24)式计算)。这点也为实验所证实。③采用Mises屈服条件( $\mu_\sigma=0\sim 0.9$ )计算的弹性极限载荷 $P_e$ 比Tresca屈服条件的结果高。如按本算例取 $\mu_\sigma=0$ ,  $\mu=0.1$ 时,高达16.7%,实验结果与Tresca屈服条件的结果较接近,而当 $\mu_\sigma=1$ 时,两者结果相同。④钢管较薄,应力沿 $r$ 向变化很小,按Tresca屈服条件计算的 $P_e$ 及 $P_e^*$ 很接近,相差约3.1%。按(4), (20)式计算应力值不会超出工程上允许的误差(5%),基本上是准确的,然而随着管壁增厚,误差明显增大,必须用全量理论重新进行积分运算。

钢管经过塑性流动阶段后,随着材料的强化,按理想塑性材料计算的载荷 $P_s$ 出现明显的误差。文[5]按强化材料用全量理论计算厚壁筒受内压问题;文[6]假设材料服从Mises屈服条件及Prandtl-Reuss本构方程用有限元法计算厚壁筒受内压问题。本文的受力模型比他们复杂,从弹性到塑性流动阶段采用理想塑性材料的假设已足够准确,所得公式为钢制三通管早期弹、塑性变形的计算提供了理论依据;同时可用数值仿真的方法,选择一种最佳的加载方案实现对轴向载荷 $P$ 和内压力 $q_1$ 的控制,具有较大的实用价值。

### 参 考 文 献

- [1] Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*. 1956, 345
- [2] 王仁、黄文彬著, 塑性力学引论, 北京大学出版社, 1982
- [3] 王仁、熊祝华、黄文彬著, 塑性力学基础, 科学出版社, 1982
- [4] 北京通用机械厂编, 机械工人切削手册, 机械工业出版社, 1970
- [5] Ильюшин, А. А., Огцбалон, П. М., *Упруго-Пластические Деформации Полых Цилиндров*, Мзд, Цъу, 1960
- [6] Marcal, P.V. and King, I.P., *Int.J. Mech. Sci.*, 9 (1967), 143-155

## The Computation of the Elastic and Plastic Limit Loading Thin-Walled Steel Tube in the Steel Mould

Guo Jinji\* Guo Mianqun Yan Shusen

### Abstract

Studies the internal stress and deformation of the thin-walled steel tube in the steel mould under the action of axial force, extrusion stress, internal pressure and frictional force. The elastic and plastic limit loading of the steel tube is calculated. The influence of frictional coefficient between steel tube and steel mould on the limit loading is discussed here. Finally, the calculating examples are illustrated.

**Keywords** Thin-walled steel tube, Elastic and plastic limit loading, Complete variable theory of plasticity

\* Department of Mechanics