

线粘弹性动力学中Laplace变换形式的 各种新的变分原理*

罗 恩

(力学系)

摘 要

从线粘弹性动力学中一个用Laplace变换表示的积分关系式出发, 导出各种成互补关系的Laplace变换形式的变分原理, 并阐明它们之间的内在联系。通过这条新途径, 建立了各种形式的变分原理。

关键词 变分原理, 拉普拉斯变换, 粘弹性动力学

在工程材料中, 既具有弹性性质, 又具有粘性性质的材料称为粘弹性体。粘弹性性质的特点就是它与时间的相关性。在粘弹性材料的本构方程中除了应力和应变外, 还包括有它们对时间的导数的影响。

粘弹性动力学中三类变量、二类变量及一类变量卷积形式的变分原理, 已先后由Leffman⁽¹⁾、Oden和Reddy⁽²⁾等人给出, 本文从线粘弹性动力学中一个用Laplace变换表示的积分关系式出发, 系统地导出各种成互补关系的Laplace变换形式的变分原理, 并阐明它们之间的内在联系。文中建立了这种形式的五类变量、四类变量、三类变量、二类变量及一类变量等一整套新的变分原理。

1 用Laplace变换表示的基本方程

设 $\beta(x, y, z, t)$ 为某一函数, 定义于 $t \geq 0$ 。 β 的Laplace变换用相应的大写字母 $B(x, y, z, s)$ 来表示, 即

$$B(x, y, z, s) = \int_0^{\infty} \beta(x, y, z, t) e^{-st} dt \quad (1)$$

将线粘弹性动力学中的基本方程对时间 t 作Laplace变换, 就可得到下列变换后的基本方程:

本文1987年4月收到

• 国家自然科学基金资助项目

$$\text{速度位移关系} \quad V_i = sU_i - u_{0i} \quad (2)$$

$$\text{动量速度关系} \quad P_i = \rho V_i \quad (3)$$

$$\text{运动方程} \quad \sum_{i,j} p_{i,j} + F_i = sP_i - p_{0i} \quad (4a)$$

$$\text{或} \quad \sum_{i,j} p_{i,j} + F_i = \rho s^2 U_i - \rho s u_{0i} - \rho \dot{u}_{0i} \quad (4b)$$

$$\text{应变位移关系} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (5)$$

应力应变关系⁽⁴⁾ 对于线粘弹性理论中较简单而用得最广的 Boltzmann 模型而言, 如果运动是在 $t=0$ 时刻开始, 且 $\sigma_{ij}(x,0) \neq 0$, $\varepsilon_{ij}(x,0) \neq 0$, 以及 $\sigma_{ij}(x,t) = \varepsilon_{ij}(x,t) = 0 (t < 0)$, 则有

$$\text{① Boltzmann 松弛律} \quad \sum_{i,j} \bar{G}_{ijkl} E_{kl} \quad (6a)$$

$$\text{② Boltzmann 蠕变律} \quad E_{ij} = s \bar{J}_{ijkl} \sum_{kl} \quad (6b)$$

式中 $\bar{G}_{ijkl}(x,s)$ 和 $\bar{J}_{ijkl}(x,s)$ 分别为松弛函数 $G_{ijkl}(x,u)$ 和蠕变函数 $J_{ijkl}(x,t)$ 的 Laplace 变换, 且有

$$\bar{G}_{ijkl} = \bar{G}_{jikl} = \bar{G}_{ijlk} = \bar{G}_{klij}, \quad \bar{J}_{ijkl} = \bar{J}_{jikl} = \bar{J}_{ijlk} = \bar{J}_{klij} \quad (7a)$$

$$\text{和} \quad \bar{G}_{ijkl} \bar{J}_{ijmn} = \frac{1}{s^2} \delta_{km} \delta_{ln} \quad (7b)$$

$$\text{式中} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\text{力的边界条件} \quad H_i \equiv \sum_{i,j} n_j = \bar{H} \quad \text{在 } \partial\Omega_\Sigma \text{ 上} \quad (8)$$

$$\text{位移边界条件} \quad U_i = \bar{U}_i \quad \text{在 } \partial\Omega_U \text{ 上} \quad (9)$$

式中 $P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \sum_{i,j}$ 分别为原动量场 p_i 、速度场 v_i 、位移场 u_i 、应变场 ε_{ij} 及应力场 σ_{ij} 的 Laplace 变换; $F_i, \bar{H}_i, \bar{U}_i$ 分别为原体力 f_i 、表面已知力 \bar{h}_i 、表面已知位移 \bar{u}_i 的 Laplace 变换; ρ, u_{0i}, p_{0i} 分别为物体的密度、 $t=0$ 时的已知初始位移值和动量值。

2 一个用 Laplace 变换表示的积分关系式

对于小位移变形体动力学, 可给出下列用 Laplace 变换表示的积分关系式

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\sum_{i,j} p_{i,j} - sP_i + p_{0i} \right) U_i d\Omega + \iint_{\Omega} \left(\sum_{i,j} U_{i,i} + P_i (sU_i - u_{0i}) \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} H_i U_i ds \\ & + \iint_{\Omega} \left(P_i u_{0i} - p_{0i} U_i \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

不难证明, 对于互不相关的任意位移场 U_i 、应力场 $\sum_{i,j}$ 及动量场 P_i , 上式恒成立。

3 各种变分原理

3.1 五类变量广义变分原理

当 $\sum_{i,j}$ 和 E_{ij} 是互不相关的任意函数时, 存在下列关系

$$\sum_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} s \bar{G}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \sum_{ij} \sum_{kl} + \frac{1}{2} (\sum_{ij} - s \bar{G}_{ijkl} E_{kl}) \cdot (E_{ij} - s J_{ijmn} \sum_{mn}) \quad (11)$$

只有当 \sum_{ij} 和 E_{ij} 满足应力应变关系(6a, b)时, 才有

$$\sum_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} s \bar{G}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \sum_{ij} \sum_{kl} \quad (12)$$

于是(10)式第二个积分中的被积函数 $\sum_{ij} U_{i,j}$ 可变换为

$$\begin{aligned} \sum_{ij} U_{i,j} = & \frac{1}{2} s \bar{G}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} - \sum_{ij} \left[E_{ij} - \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \right] + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \sum_{ij} \sum_{kl} \\ & + \frac{1}{2} (\sum_{ij} - s \bar{G}_{ijkl} E_{kl}) (E_{ij} - s J_{ijmn} \sum_{mn}) \end{aligned} \quad (13)$$

当 P_i, V_i 是互不相关的任意函数时, 存在下列关系

$$P_i V_i = \frac{1}{2} \rho V_i V_i + \frac{1}{2\rho} P_i P_i - \frac{1}{2\rho} (\rho V_i - P_i)(\rho V_i - P_i) \quad (14)$$

只有当 P_i 与 V_i 满足动量速度关系(3)时, 才有

$$P_i V_i = \frac{1}{2} \rho V_i V_i + \frac{1}{2\rho} P_i P_i \quad (15)$$

于是, (10)式第二个积分中的被积函数 $P_i(sU_i - u_{0i})$ 可变换为

$$\begin{aligned} P_i(sU_i - u_{0i}) = & \frac{1}{2} \rho V_i V_i + P_i(sU_i - u_{0i} - V_i) + \frac{1}{2\rho} P_i P_i \\ & - \frac{1}{2\rho} (\rho V_i - P_i)(\rho V_i - P_i) \end{aligned} \quad (16)$$

在(10)式中 P_i, \sum_{ij}, U_i 是互不相关的任意三类场, 所以式中的第一、三、四项积分可变换为

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[(\sum_{ij,j} - s P_i + p_{0i}) U_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} H_i U_i ds + \int_{\Omega} (P_i u_{0i} - p_{0i} U_i) d\Omega = \iint_{\Omega} \left[(\sum_{ij,j} - s P_i + p_{0i} \right. \right. \\ & \left. \left. + F_i \right) U_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_U} H_i U_i ds - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} (H_i - \bar{H}_i) U_i ds + \int_{\Omega} P_i u_{0i} d\Omega - \int_{\Omega} (F_i + p_{0i}) U_i d\Omega \right. \\ & \left. - \int_{\partial\Omega_U} (U_i - \bar{U}_i) H_i ds \right] \quad (17) \end{aligned}$$

将(13), (16)和(17)代入(10)式中, 经整理后得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho V_i V_i + P_i(sU_i - u_{0i} - V_i) + \frac{1}{2} s \bar{G}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} - \sum_{ij} \left[E_{ij} - \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \right] \right. \\ & \left. - (F_i + p_{0i}) U_i \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} \bar{H}_i U_i ds - \int_{\partial\Omega_U} (U_i - \bar{U}_i) H_i ds + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2\rho} P_i P_i \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\rho} (\rho V_i - P_i)(\rho V_i - P_i) + P_i u_{0i} + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \sum_{ij} \sum_{kl} + \frac{1}{2} (\sum_{ij} - s \bar{G}_{ijkl} E_{kl}) \right\} \end{aligned}$$

$$(E_{ij} - sJ_{ijmn}\Sigma_{mn}) + \left\{ \sum_{ij} (sP_i + p_{0i} + F_i) U_i \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_U} U_i H_i ds - \int_{\partial\Omega_\Sigma} (H_i - \bar{H}_i) U_i ds = \Pi_{VL5}(P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}) + \Gamma_{VL5}(P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}) = 0 \quad (18)$$

式中 $P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}$ 是独立无关的任意五类函数, 而泛函 Π_{VL5} 和 Γ_{VL5} 分别为

$$\begin{aligned} \Pi_{VL5}(P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho V_i V_i + P_i (sU_i - u_{0i} - V_i) + \frac{1}{2} s \bar{G}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \right. \\ & - \sum_{ij} \left(E_{ij} - \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \right) - (F_i + p_{0i}) U_i \left. \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_\Sigma} H_i U_i ds \\ & - \int_{\partial\Omega_U} (U_i - \bar{U}_i) H_i ds \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{VL5}(P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ -\frac{1}{2\rho} P_i P_i - \frac{1}{2\rho} (\rho V_i - P_i)(\rho V_i - P_i) + P_i u_{0i} \right. \\ & + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} + \frac{1}{2} (\Sigma_{ij} - s \bar{G}_{ijkl} E_{kl}) (E_{ij} - s J_{ijmn} \Sigma_{mn}) \\ & \left. + \left\{ \sum_{ij} (sP_i + p_{0i} + F_i) U_i \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_U} U_i H_i ds - \int_{\partial\Omega_\Sigma} (H_i - \bar{H}_i) U_i ds \right. \end{aligned} \quad (19b)$$

定理 1 上述以 $P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}$ 为自变函数的泛函 Π_{VL5} 或 Γ_{VL5} 取驻值, 即下列变分式

$$\delta \Pi_{VL5} = 0 \text{ 或 } \delta \Gamma_{VL5} = 0 \quad (20)$$

等价于方程 (2), (3), (4a), (5), (6a), (8) 和 (9)。

证明 将 (19a) 式对自变函数 $P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}$ 变分, 最后可得

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{VL5} = & \int_{\Omega} \left\{ (sU_i - u_{0i} - V_i) \delta P_i + (\rho V_i - P_i) \delta V_i - \left[\sum_{ij} (sP_i + p_{0i} + F_i) U_i \right] \delta U_i \right. \\ & + (s \bar{G}_{ijkl} E_{kl} - \Sigma_{ij}) \delta E_{ij} - \left[E_{ij} - \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \right] \delta \Sigma_{ij} \left. \right\} d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega_U} (U_i - \bar{U}_i) \delta H_i ds + \int_{\partial\Omega_\Sigma} (H_i - \bar{H}_i) \delta U_i ds \end{aligned} \quad (21)$$

由此可见, 若 $P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}$ 是精确解, 确能使 $\delta \Pi_{VL5} = 0$; 而若 $\delta \Pi_{VL5} = 0$, 由于 $\delta V_i, \delta P_i, \delta E_{ij}, \delta \Sigma_{ij}, \delta U_i$ 的任意性, 确能导出方程 (2), (3), (4a), (5), (6a), (8) 和 (9)。

Π_{VL5} 和 Γ_{VL5} 为线粘弹性动力学 Laplace 变换形式的胡海昌—鹤津型五类变量广义变分原理的泛函, 对于任意无关的 $P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}$, Π_{VL5} 与 Γ_{VL5} 之间存在互补关系 (18)。

3.2 三类变量广义变分原理

a. 当 P_i, V_i 和 U_i 满足方程 (2), (3) 时, (18) 式就可变成

$$\Pi_{VL3}(U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}) + \Gamma_{VL3}(U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}) = 0 \quad (22)$$

而泛函 Π_{VL3} 和 Γ_{VL3} 分别为

$$\begin{aligned} \Pi_{VL3}(U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} s \bar{G}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + \frac{1}{2} \rho s^2 U_i U_i - (\rho \dot{u}_{0i} + \rho s u_{0i} + F_i) U_i \right. \\ & \left. - \Sigma_{ij} \left[E_{ij} - \frac{1}{2} (U_{i,i} + U_{j,i}) \right] + \frac{1}{2} \rho u_{0i}^2 \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_U} (U_i - \bar{U}_i) H_i ds - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} H_i U_i ds \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{VL3}(U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho s^2 U_i U_i + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} + \frac{1}{2} (\Sigma_{ij} - s \bar{G}_{ijkl} E_{kl}) \right. \\ & \left. \cdot (E_{ij} - s J_{ijmn} \Sigma_{mn}) + \left[\Sigma_{i,j} + F_i - \rho s^2 U_i + \rho s u_{0i} + \rho \dot{u}_{0i} \right] U_i - \frac{1}{2} \rho u_{0i}^2 \right\} d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega_U} U_i H_i ds - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} (H_i - \bar{H}_i) U_i ds \end{aligned} \quad (23b)$$

定理 2 上述以 U_i, E_{ij}, Σ_{ij} 为自变函数的泛函 Π_{VL3} 或 Γ_{VL3} 取驻值, 即下列变分式

$$\delta \Pi_{VL3} = 0 \quad \text{或} \quad \delta \Gamma_{VL3} = 0 \quad (24)$$

与方程(4b), (5), (6a), (8)和(9)是等价的。

Π_{VL3} 和 Γ_{VL3} 是线粘弹性动力学中Laplace变换形式的胡海昌—鹭津型三类变量广义变分原理的泛函, 对于任意无关的 U_i, E_{ij}, Σ_{ij} , 它们之间存在互补关系(22)。

b. 当 E_{ij} 和 Σ_{ij} 满足(6a)式和 P_i 与 V_i 满足(3)式时, 方程(18)就变成

$$\Pi_{VLR3}(P_i, U_i, \Sigma_{ij}) + \Gamma_{VLR3}(P_i, U_i, \Sigma_{ij}) = 0 \quad (25)$$

而泛函 Π_{VLR3} 和 Γ_{VLR3} 分别为

$$\begin{aligned} \Pi_{VLR3}(P_i, U_i, \Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ P_i (s U_i - u_{0i}) - \frac{1}{2\rho} P_i P_i - p_{0i} U_i + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} (U_{i,j} + U_{j,i}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} s J_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} - F_i U_i \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} H_i U_i ds - \int_{\partial\Omega_U} (U_i - \bar{U}_i) H_i ds \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{VLR3}(P_i, U_i, \Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ -\frac{1}{2\rho} P_i P_i + P_i u_{0i} + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} + \left[\Sigma_{i,j} + F_i - s P_i \right. \right. \\ & \left. \left. + p_{0i} \right] U_i \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_U} U_i H_i ds - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} (H_i - \bar{H}_i) U_i ds \end{aligned} \quad (26b)$$

定理 3 上述以 P_i, U_i, Σ_{ij} 为自变函数的泛函 Π_{VLR3} 或 Γ_{VLR3} 取驻值, 即下列变分式

$$\delta \Pi_{VLR3} = 0 \quad \text{或} \quad \delta \Gamma_{VLR3} = 0 \quad (27)$$

与方程(4a), (8), (9)及下列方程

$$P_i = \rho (s U_i - u_{0i}) \quad (28)$$

$$s J_{ijkl} \Sigma_{kl} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (29)$$

是等价的。

Π_{VLR3} 和 Γ_{VLR3} 是线粘弹性动力学中Laplace变换形式的 Hellinger-Reissner 型三类变量广义变分原理的泛函, 对于任意无关的 P_i, U_i, Σ_{ij} , 它们之间存在互补关系(25)。

3.3 二类变量广义变分原理

当 Σ_{ij} 和 E_{ij} 满足(6a)式时, (22)式就可变成为

$$\Pi_{VLR2}(U_i, \Sigma_{ij}) + \Gamma_{VLR2}(U_i, \Sigma_{ij}) = 0 \quad (30)$$

而泛函 Π_{VLR2} 和 Γ_{VLR2} 分别为

$$\begin{aligned} \Pi_{VLR2}(U_i, \Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho s^2 U_i U_i + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} (U_{i,j} + U_{j,i}) - \frac{1}{2} s J_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} - (\rho \dot{u}_{0i} \right. \\ & \left. + \rho s u_{0i} + F_i) U_i + \frac{1}{2} \rho u_{0i}^2 \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_U} (U_i - U_i) H_i ds - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} H_i U_i ds \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{VLR2}(U_i, \Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho s^2 U_i U_i + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} + \left[\Sigma_{ij,j} + F_i - \rho s^2 U_i + \rho s u_{0i} \right. \right. \\ & \left. \left. + \rho \dot{u}_{0i} \right] U_i - \frac{1}{2} \rho u_{0i}^2 \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_U} U_i H_i ds - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} (H_i - H_i) U_i ds \end{aligned} \quad (31b)$$

定理 4 上述以 U_i, Σ_{ij} 为自变函数的泛函 Π_{VLR2} 或 Γ_{VLR2} 取驻值, 即下列变分式

$$\delta \Pi_{VLR2} = 0 \quad \text{或} \quad \delta \Gamma_{VLR2} = 0 \quad (32)$$

与方程(4b), (29), (8)和(9)是等价的。

Π_{VLR2} 和 Γ_{VLR2} 是线粘弹性动力学中Laplace变换形式的Hellinger-Reissner型二类变量广义变分原理的泛函。对于任意无关的 U_i, Σ_{ij} , 它们之间存在互补关系(30)。

应当指出, 在(23a, b), (31a, b)式中, 划线项在变分时不起作用, 但当变换为原函数时, 这些项是有用的, 故保留在式中。

当 $P_i, V_i, U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}$ 满足线粘弹性动力学全部基本方程, 即对应于精确解时, (18)式就变为

$$\Pi_{VL} + \Gamma_{VL} = 0 \quad (33)$$

式中

$$\Pi_{VL} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho V_i V_i - p_{0i} U_i + \frac{1}{2} s \bar{G}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} - F_i U_i \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} H_i U_i ds \quad (34a)$$

$$\Gamma_{VL} = \int_{\Omega} \left\{ -\frac{1}{2\rho} P_i P_i + P_i u_{0i} + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_U} U_i H_i ds \quad (34b)$$

Π_{VL} 和 Γ_{VL} 分别是线粘弹性动力学中Laplace变换形式的最小势能原理和最小余能原理的泛函。应当指出, 它们之间的互补关系(33), 只有对精确解情形才成立。

这两个变分原理都是有条件的变分原理。在泛函 Π_{VL} 中, V_i, U_i, E_{ij} 三类变量的约束条件是: 速度位移关系(2), 应变位移关系(5)和位移边界条件(9); 而在泛函 Γ_{VL} 中, P_i, Σ_{ij} 二类变量的约束条件是: 运动方程(4a)及力的边界条件(8)。

3.4 一类变量变分原理

a. 将(2)和(5)代入(34a)式中, 泛函 Π_{VL1} 可变成

$$\begin{aligned} \Pi_{VL1}(U_i) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} s \bar{G}_{ijkl} U_{i,j} U_{k,l} + \frac{1}{2} \rho s^2 U_i U_i - (\rho \dot{u}_{0i} + \rho s u_{0i} + F_i) U_i \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \rho u_{0i}^2 \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} H_i U_i ds \end{aligned} \quad (35)$$

在泛函 Π_{VL1} 中, 变量 U_i 应满足位移边界条件(9).

b. 当 U_i, Σ_{ij} 满足方程(4b)时, 泛函 Γ_{VL2} 就变成

$$\begin{aligned} \Gamma_{VL2}(\Sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2\rho s^2} \Sigma_{i,m,m} \Sigma_{ij,i} + \frac{1}{2} s J_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} - \frac{1}{\rho s^2} \Sigma_{ij} (F_i + p_{0i} \right. \\ & \left. + \rho s u_{0i}),_j + \frac{1}{2\rho s^2} (F_i + p_{0i})(F_i + p_{0i}) + \frac{1}{s} (F_i + p_{0i}) u_{0i} \right\} d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega_U} \left[\frac{1}{\rho s^2} (F_i + p_{0i} + \rho s u_{0i}) - U_i \right] H_i ds - \int_{\partial\Omega_{\Sigma}} \left\{ (H_i - H_i) \frac{1}{\rho s^2} \Sigma_{ij},_j \right. \\ & \left. - H_i \frac{1}{\rho s^2} (F_i + p_{0i} + \rho s u_{0i}) \right\} ds \end{aligned} \quad (36)$$

式中划线项在变分时不起作用, 可以去掉.

Γ_{VL2} 就是线粘弹性动力学中仅以应力 Σ_{ij} 为独立变量的 Laplace 变换形式的余能变分原理的泛函.

参 考 文 献

- [1] M. J. Leitman, Variational principles in the linear dynamic theory of viscoelasticity, *Quart. Appl. Math.*, 24, 1 (1966), 37-46.
- [2] M. J. Leitman, The linear theory of viscoelasticity, *Encyclopedia of physics*, VIa/3, *Mechanics of Solids*, I (1973), 112-114.
- [3] J. T. Oden and J. N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [4] Y. C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1965).
- [5] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社, 1981.
- [6] 罗恩, 弹性力学中的基本广义变分原理与组合广义变分原理, *中山大学学报(自然科学版)*, 1985, 4.

New Variational Principles Using Laplace Transforms in the Linear Dynamic Theory of Viscoelasticity

Luo En

Abstract

Various new variational principles are derived in a systematic manner from a transformed integral relation in linear theory of dynamic viscoelasticity, and the intrinsic relationship between the various variational principles can be explained clearly. With the new approach proposed by the author, the five-field, four-field, three-field, two-field and one-field new variational principles in terms of Laplace transforms can be established simply and directly.

Keywords variational principle, Laplace transform, dynamic viscoelasticity