1988年第1期 中山大学学报 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI №. 1, 1988

一类n维被食者-捕食者方程的极限集和周期解*

周之铭

(数学系)

摘 要

本文主要讨论Volterra被食者—捕食者系统：

$$\dot{x}_i=x_i(e_i+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j),x_i(0)>0,\quad i=1,\cdots,n \tag{$*$}$$

的极限集和周期解问题，其中e_i和p_{ij}是实数，在P是稳定容许的条件下，将($*$)的极限集和周期解的讨论转化为一个维数较低的方程的研究，对于某些类型的方程得到结论：如果($*$)的正平衡点不是全局渐近稳定的，那么($*$)存在非常数的周期解。

关键词 被食者—捕食者系统，极限集，周期解

1 引言

考虑n维Volterra被食者—捕食者系统

$$\dot{x}_i=x_i(e_i+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j),x_i(0)>0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{$*$}$$

其中e_i和p_{ij}是实常数。假设系统满足如下条件：

i) $p_{ii}\leqslant 0, p_{ij}p_{ji}<0$，当$(i-j)p_{ij}\neq 0$时，

ii) 存在正平衡点$q=(q_1,\cdots q_n)$，即

$$e_i+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}q_j=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

这时，($*$)可以用一个具有n个顶点的图表示，记为$G(P)$，参阅文[2,5]。

作变量变换

本文1986年10月收到

* 中山大学高等学术研究中心基金会的部份资助项目

$$x_i = q_i e^{Y_i},\ w_i = q_i(e^{Y_i} - 1),$$

$V = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i\ (e^{Y_i} - Y_i - 1)$，其中$a_i > 0$是常数。经过简单计算，（•）变为

$$\dot{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

沿着(1)的轨线计算得到

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i p_{ij} w_i w_j$$

根据Lasalle定理[1]，方程(1)的每一有界解都趋于满足$\dot{V} = 0$的最大不变集。文〔2〕利用Lasalle定理及图的变换，得到(1)的平衡点$Y = 0$的稳定性的简易判别准则，本文继续文〔2〕、〔3〕的讨论，研究了(1)的极限集和周期解问题。

2 有关的定义和定理

我们假定P是稳定容许的[2]，记为$P \epsilon A$，$P \epsilon A$的条件参看文〔4〕。

$G(P)$中直接连接两个黑点的边称为**强链扣**。

定理A[2] 设$P \epsilon A$，那么，$G(P)$中每一圈至少包含有一个强链扣。

如果$P \epsilon A$，在〔4〕中证明了可以选取$a_i > 0$，使得

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow p_{ii} w_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

因此在Lasalle定理中的满足$\dot{V} = 0$的最大不变集L就是满足方程

$$\dot{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j \qquad p_{ii} w_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{2}$$

的所有解所对应的轨道的并集。

在$G(P)$中，如果在顶点i有一黑点●，那么在(2)中得到$w_i = 0$，我们扩充黑点●的含意，当在(2)中有$w_i = 0$，我们在顶点i放一黑点●；如果在(2)中w_i是常数，我们在顶点i上放⊕，这种放置●和⊕的过程叫做对图$G(P)$进行约化，约化规则可以参阅文〔2,5〕。

反复运用约化规则，对$G(P)$进行约化，直至不能再有进一步变化时所得到的图，叫做约化图，记为$R(P)$。

可以将$R(P)$进行分类，且只有下列三种：

$R(P)$属于(●)型，如果$R(P)$的每一顶点都具有●；

$R(P)$属于(●,⊕)型，如果$R(P)$的每一顶点都具有●或⊕，且至少有一个⊕；

$R(P)$属于(●,⊕,○)型，如果至少有一顶点具有○。

定理B[3] 设$P \epsilon A$，那么

a) 如果$R(P)$属于(●)型，那末P是非奇异的，(1)的每一个解都趋于$Y = 0$，当$t \to \infty$时；

b) 如果$R(P)$属于(●,⊕)型，那末P是奇异的，(1)的每一个解都有极限，当$t \to \infty$时，极限依赖于初值；

c) 如果$R(P)$属于(●,⊕,○)型，那末存在矩阵$\tilde{P}\epsilon A$，$G(\tilde{P})=G(P)$，使得对应于$\tilde{P}$的(1)有非常数的周期解。

3 (●,⊕,○)型与周期解

我们总假设$P\epsilon A$，从定理B知道，(●)型、(●,⊕)型的每一个解都有极限，也就是说，其ω极限点集只有一点，因此，只有(●,⊕,○)型才可能出现非常数的周期解，定理B指出通过改变方程的矩阵的系数，但不改变矩阵P的图，可以使得方程(1)有非常数的周期解。微分方程理论中，经常出现的问题却是不改变P的值，而去探讨P满足什么条件才能出现非常数的周期解。本节里我们利用约化图$R(P)$和方程(2)的关系，使得对(1)的极限集和周期解的研究得到简化。

如果$G(P)$没有黑点，即所有的$p_{ii}=0$，则由定理A，知$G(P)$必定是一树，且$G(P)=R(P)$属于(●,⊕,○)型，这时可选得$V=\sum_{i=1}^{n}a_iq_i(e^{Y_i}-Y_i-1)$使得$\dot{V}=0$，(1)有积分$V=C$。我们不讨论这种情况。

定理1 假设$p\epsilon A$，$G(P)$至少有一个黑点。$R(P)$属于(●,⊕,○)型的必要条件是$R(P)$至少含有4个○。

证明 首先证明$R(P)$中的每一个○至少相邻于另一个○。设$R(P)$中的i上有○，如果i不相邻于任一个○，那么，相邻于i的所有顶点都具有●或者⊕，这时由约化规则在i上可放⊕，这与$R(P)$的定义矛盾，由于$G(P)$至少有一个黑点，所以$R(P)$中至少有一个○顶点j与某一个具有●或者⊕的顶点K相邻。相邻于K至少有一个异于j的○顶点i，否则由约化规则在j上可放置●或⊕。这就完成了定理的证明。

推论1 $R(P)$属于(●,⊕,○)型的必要条件是$n\geqslant5$。

推论2 当$n\leqslant4$，(1)的每一解的ω极限集都是平衡点，且(1)的每一解的ω极限集都是相同的平衡点$Y=0$的充要条件是P是非奇异的。当$n\geqslant5$时，(1)才能出现非常数的周期解。

定理2 (1)具有非常数周期解的充要条件是L内含有(1)的闭轨。

证明 充分性是显然的。必要性：设$\varphi(t)$是(1)的非常数周期解，这时，$0(\varphi(t))=\Omega(\varphi(t))$，因而由Lasalle定理得出$0(\varphi(t))=\Omega(\varphi(t))\subset L$，定理证毕。

定理3 设$R(P)$属于(●,⊕,○)型且含有K个黑点，则(1)的解$\varphi(t)$的ω极限集包含在一个维数不超过$n-K$的空间的不变子集里。

证明 注意到$R(P)$具有K个黑点，因此在方程(2)里有K个变量$Y_{L1},\cdots,Y_{LK}$恒为零，再由Lasalle定理即知定理成立。

定理2、3使得对(1)的非常数周期解和极限集的讨论化为一个维数较低方程的相应问题的讨论，特别当$R(P)$中具有很多黑点时，简化就更为明显。

当$n=5$时，属于(●,⊕,○)型的图只有○—○—●—○—○，不妨标记之为

○—○—●—○—○，对应的方程为
1　2　3　4　5

$$\dot{Y}_1=p_{12}w_2$$
$$\dot{Y}_2=p_{21}w_1+p_{23}w_3$$

$$\dot{Y}_3 = p_{32}w_2 + p_{33}w_3 + p_{34}w_4 \tag{3}$$
$$\dot{Y}_4 = p_{43}w_3 + p_{45}w_5$$
$$\dot{Y}_5 = p_{54}w_4$$

其中所有出现的p_{ij}都不为零，且满足 i ）。

这时Lasalle不变集L是形如$(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), 0, \varphi_4(t),\ \varphi_5(t))$的点集，其中$(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), (\varphi_4(t), \varphi_5(t))$分别是方程

$$\dot{Y}_1 = p_{12}w_2$$
$$\dot{Y}_2 = p_{21}w_1 \tag{3a}$$

和

$$\dot{Y}_4 = p_{45}w_5$$
$$\dot{Y}_5 = p_{54}w_4 \tag{3b}$$

的解，且$\varphi_2(t), \varphi_4(t)$满足方程

$$p_{32}q_2(e^{\varphi_2(t)} - 1) + p_{34}q_4(e^{\varphi_4(t)} - 1) = 0 \tag{3c}$$

定理4　对于方程(3)，或者每一个解的ω极限集只包含平衡点$Y=0$，或者(3)具有非常数的周期解。

证明　方程(3a),(3b)除零解外，所有解都是非常数的周期解，由于$\varphi_2(t), \varphi_4(t)$满足(3c)，易知此时如果$\varphi_2(t) \neq 0$,则$\varphi_2(t)$与$\varphi_4(t)$是具有相同周期的函数，$L$显然包含$Y=0$,所以，或者$L$只包含$Y=0$,或者$L$除包含$Y=0$外还包含异于$Y=0$的解$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), 0, \varphi_4(t),\ \varphi_5(t))$所对应的轨道。这时$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), 0, \varphi_4(t), \varphi_5(t))$为非常数的周期解。由此即得定理。

对于图为○—○—●—○—○—○的方程可以得到定理4同样的结论，关键是方程(2)中存在一个形如方程(3a)的二阶方程，它具有除零解外都是非常数周期解的特性。由此读者可以给出更多具有方程(3)同样性质的更广泛类型的方程。

一般难予确定Lasalle不变集具有闭轨的条件，虽然方程(2)比原来的方程(1)简单。对于方程(3)，可以给出存在闭轨的充分条件，例如

$$p_{12}q_2 = p_{54}q_4$$
$$p_{21}q_1 = p_{45}q_5$$
$$p_{34}q_4 + p_{32}q_2 = 0$$

不过这是相当人为的，要确定周期解的存在条件是困难的，定理4告诉我们，对于方程(3)，如果零解不是全局渐近稳定的，那么(3)存在非常数的周期解。

参考文献

〔1〕Lasalle J., *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-7(1960) 520-527.

〔2〕Redheffer R. & Zhou Z., *Nonlinear Analysis*, 5 (1981), 12, 1309-1329.

〔3〕Redheffer R. & Walter W., *Nonlinear Analysis*, 7 (1983), 4,333-347.

〔4〕Redheffer R. & Zhou Z., *J. Alg. Dis. Meth.*, 3 (1982), 1, 122-134.

〔5〕朱思铭、周之铭，生态科学，1986，1，58—63.

Limit Set and Periodic Solutions of a Class of n-variable Prey-predator Systems

Zhou Zhiming

Abstract

We mainly discuss the limit set and periodic solutions of the n-variable Volterra prey-predator systems

$$\dot{x}_i = x_i(e_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j), x_i(0) > 0, \quad i = 1, \cdots, n \qquad (\bullet)$$

where e_i and p_{ij} are rcal numbers. Under the assumption that $P = (p_{ij})$ is stably admissible, we reduce the problem of the limit set and periodic solutions of $(\bullet)$ to that of the corresponding equations with lower dimensions. We conclude that for certain kinds of systems, if the positive critical point is not globally asymptotically stable, then $(\bullet)$ has nonconstant periodic solution.

Keywords prey-predator systems, limit set, periodic solution