第28卷 第2期 中山大学学报（自然科学版） Vol.28 №.2
1989年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1989

单链SU(3)群积分的定积分表示*

刘金明 宫 蒂
（物理学系） （无线电电子学系）

摘 要

应用复变函数积分的最陡下降法，在弱耦合区将单链配分函数SU(3)群积分表示成一元实变函数的定积分，可以用数值计算方法很方便地求值。此法可以推广到计算格点规范理论中遇到几种有关的SU(3)群积分。

关键词 格点规范理论，SU(3)群，最陡下降法

1 引 言

在格点规范理论研究中，当规范群为SU(3)群时，人们经常碰到如下形式的单链SU(3)群积分[1-4]。

$$Z = \int_{SU(3)} \mathrm{d}U e^{\mathrm{Tr}(J^{+}U+U^{+}J)} \tag{1}$$

式中dU是在SU(3)群流形上的归一化不变Haar测度。U是SU(3)群的元素，J是任意一个3×3矩阵。这个积分比类似的单链SU(2)群积分复杂得多，往往成为SU(3)格点规范理论计算中的一个难点。许多论文研究了这种积分的计算方法[5-8]，其中文献[7]给出了最便于处理的公式为

$$Z = -\frac{i}{\pi}\oint \mathrm{d}x\, e^{xQ}\sqrt{x/P}\, I_1(2\sqrt{P/x}) \tag{2}$$

式中，对x的积分是沿复x平面上绕原点的一个封闭回路进行的。I_1为一阶虚宗量贝塞尔函数。P和Q分别为

$$P = \det(1 + xJJ^{+}) \tag{3}$$

$$Q = \det J + \det J^{+} \tag{4}$$

文献[8]给出了与(2)式等价的，含有一阶贝塞尔函数J_1的复变函数回路积分表示式。并给出了4重求和的幂级数表示式。在变分计算中，通常取

$$J = z1 \tag{5}$$

式中1代表3×3单位矩阵，z为实数变分参数。这时4重求和可简化为两重求和如下[9]：

本文1988年6月25日收到

* 中山大学高等学术研究中心基金会资助课题

$$Z = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m}}{(m+1)!(m+2)!}\sum_{n=0}^{m}\frac{(2z)^n}{n!}\cdot\frac{(3m+3)!}{(2m+n+3)!(m-n)!} \tag{6}$$

但这级数收敛很慢，$z>2$ 时，要取很多项才能得到准确的 4 位有效数字。z 愈大，愈难用(6)式求出 Z 的值，因此在实际应用中仍不方便。我们的计算表明，$z\geqslant 2$ 时，可用最陡下降法将 Z 表示成一个一元实变函数的定积分。这个定积分可以很方便地用数值计算方法求值。

2　最陡下降法

本文只讨论情况(5)，这时

$$Q = 2z^3 \tag{7}$$

$$P = (1 + xz^2)^3 \tag{8}$$

利用一阶虚宗量贝塞尔函数的积分表示

$$I_1(W) = \frac{W}{\pi}\int_0^{\pi} e^{W\cos\varphi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \tag{9}$$

得

$$Z = -\frac{2i}{\pi^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\,\sin^2\varphi\oint\mathrm{d}x\,e^{2z^3x+2\sqrt{P/x}\cos\varphi} \tag{10}$$

对 x 的积分可写成

$$\oint\mathrm{d}x\,e^{2z^3\hat{f}(x)} \tag{11}$$

式中

$$\hat{f}(x) = x + \frac{1}{z^3}(1+z^2x)^{3/2}x^{-1/2}\cos\varphi \tag{12}$$

当 $z>1$ 时，对 x 的回路积分，可用最陡下降法求积。即将绕原点的回路改为过鞍点 x_0 的最陡路线 C_P 与半圆周 C_R 组成的闭合回路。由 $\hat{f}'(x)=0$ 确定鞍点的位置 x_0，由于 $\cos\varphi<0$ 时，在实轴上没有鞍点。我们按 $\cos\varphi$ 的正负值把 Z 分成以下两个部分：

$$Z = Z_A + Z_B \tag{13}$$

$$Z_A = -\frac{2i}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\,\sin^2\varphi\oint\mathrm{d}x\,e^{2z^3\hat{f}(x)} \tag{14}$$

$$Z_B = -\frac{2i}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\,\sin^2\varphi\oint\mathrm{d}x\,e^{2z^3\hat{f}(x)} \tag{15}$$

本节先讨论 Z_A。这时 $\cos\varphi>0$，在实轴上有一个鞍点 x_0，

$$x_0 = [(\cos\varphi)^{2/3}/2z^2\sin\varphi][(1+\sin\varphi)^{1/3}-(1-\sin\varphi)^{1/3}] \tag{16}$$

作变数变换

$$W = x - x_0 \tag{17}$$

及函数变换

$$f(W) = \hat{f}(x) - \hat{f}(x_0) \tag{18}$$

于是(11)式化为

$$\mathrm{d}x\,e^{2z^3\hat{f}(x)} = e^{2z^3\hat{f}(x_0)}\oint\mathrm{d}W e^{2z^3\hat{f}(W)} \tag{19}$$

式中

$$\hat{f}(x_0) = x_0 + \cos\varphi x_0^{-1/2}x_1^{3/2} \tag{20}$$

$$x_1 = x_0 + (1/z^2) \tag{21}$$

$$f(W) = W + \cos\varphi[(W + x_0)^{-1/2}(W + x_1)^{3/2} - x_0^{-1/2}x_1^{3/2}] \tag{22}$$

于是，在复 W 平面上，鞍点在原点，$f(0)=0$，$f'(0)=0$。在鞍点邻域把 $f(W)$ 展成幂级数：

$$f(W) = W^2[b_0 + b_1W + b_2W^2 + b_3W^3 + \cdots] \tag{23}$$

直接计算得

$$b_0 = (3\cos\varphi/8z^4)x_0^{-5/2}\ x_1^{-1/2} \tag{24}$$

$$b_1 = -(\cos\varphi/2^4z^4)x_0^{-7/2}\ x_1^{-3/2}(5x_1 + x_0) \tag{25}$$

$$b_2 = (\cos\varphi/2^7z^4)x_0^{-9/2}\ x_1^{-5/2}(35x_1^2 + 10x_1x_0 + 3x_0^2) \tag{26}$$

$$b_3 = -(3\cos\varphi/2^8z^4)x_0^{-11/2}\ x_1^{-7/2}(21x_1^3 + 7x_1^2x_0 + 3x_1x_0^2 + x_0^3) \tag{27}$$

由 b_0 的值，可以确定在复 W 平面上，虚轴就是被积函数的负扇区中的最陡下降路线 C_P，而且沿半圆周 C_R 的积分→0，于是，应用 $2z^3 \gg 1$ 条件下复变函数积分的最陡下降路线积分公式，求得沿 C_P 的积分得

$$\oint \mathrm{d}W e^{2z^3f(W)} = d_0(1/2z^3r_0)^{1/2} + d_2(1/2z^3r_0)^{3/2} + d_4(1/2z^3r_0)^{5/2} + O[(1/2z^3r_0)^3] \tag{28}$$

式中
$$r_0 = |b_0| = (3\cos\varphi/8z^4)x_0^{-5/2}\ x_1^{-1/2} \tag{29}$$

$$d_0 = i\sqrt{\pi} \tag{30}$$

$$d_2 = -i\sqrt{\pi}A_2$$

$$A_2 = (5x_1^2 + 5x_1x_0 - x_0^2)/48x_0^2\ x_1^2 \tag{31}$$

$$d_4 = -i\sqrt{\pi}A_4$$

$$A_4 = (5/4608x_0^4\ x_1^4)(7x_1^4 + 14x_1^3x_0 + 21x_1^2\ x_0^2 - 22x_1x_0^3 + 7x_0^4) \tag{32}$$

只取到 d_4 项，代入(14)式，便得

$$Z_A = \frac{2}{\pi^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \sin^2\varphi\, e^{2z^3(x_0 + x_0^{-1/2}\ x_1^{3/2}\cos\varphi)}\left(\frac{1}{2z^3r_0}\right)^{1/2}\left[1 - A_2\left(\frac{1}{2z^3r_0}\right) - A_4\left(\frac{1}{2z^3r_0}\right)^2\right] \tag{33}$$

以 z 为参数，对(33)式进行数值计算是很方便的，这就是单链 SU(3) 积分的主要公式。

3 Z_B的计算

对于(15)式，作变数变换

$$\theta = \pi - \varphi \tag{34}$$

得
$$Z_B = -\frac{2i}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \sin^2\theta \oint \mathrm{d}x\, e^{2z^3\hat{f}_B(x)} \tag{35}$$

式中
$$\hat{f}_B(x) = x - \cos\theta\left(x + \frac{1}{z^2}\right)^{3/2} x^{-1/2} \tag{36}$$

对于复变数 x 的回路积分，也可用上节所述的最陡下降法求积，先由 $\hat{f}'_B(x) = 0$ 确定鞍点位置。这时在实轴上没有鞍点，我们取鞍点位置 $x_0 = 1/z^2(y_0^2 - 1)$

式中
$$y_0 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(v_0 - u_0) \tag{37}$$

而 $$u_0=[(1-\sin\theta)/\cos\theta]^{1/3},\quad v_0=[(1+\sin\theta)/\cos\theta]^{1/3} \tag{38}$$

再作变换

$$W=x-x_0 \tag{39}$$

$$f_B(W)=\hat{f}_B(x)-\hat{f}_B(x_0) \tag{40}$$

于是 $$2z^3\hat{f}_B(x_0)=2z^3(x_0-\cos\theta x_1^{3/2}x_0^{-1/2})=6z(g_1(\theta)+ig_2(\theta)) \tag{41}$$

式中 $$x_1=x_0+1/z^2 \tag{42}$$

$$g_1(\theta)=\frac{\cos\theta(v_0+u_0)-v_0^2-u_0^2}{2(u_0^4+v_0^4-v_0^2-u_0^2)} \tag{43}$$

$$g_2(\theta)=-\frac{\sqrt{3}(\cos\theta\cdot v_0-\cos\theta\cdot u_0+v_0^2-u_0^2-2\sin\theta)}{2(u_0^4+v_0^4-v_0^2-u_0^2)} \tag{44}$$

于是 $$Z_B=-\frac{2i}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\sin^2\theta e^{6z[g_1(\theta)+ig_2(\theta)]}\oint\mathrm{d}We^{2z^3f_B(W)} \tag{45}$$

由数值计算知在 θ 的积分区间内，$g_1(\theta)<0$，所以 Z_B 之值随 z 的增大而指数下降。对复数 W 的回路积分可只取头一项即可满足精确度，直接代入复变函数积分的最陡下降路线积分公式得

$$\oint\mathrm{d}We^{2z^3f_B(W)}=i\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2z^3r_B}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\beta_B}{2}} \tag{46}$$

式中 $$r_B=z^2\cdot\frac{3\cos\theta}{8}\cdot\left(B_x^2+B_y^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big/\left[(v_0+u_0)^2+3(v_0-u_0)^2\right] \tag{47}$$

$$B_x=12(v_0^5+u_0^5)+(14-8\sec^2\theta)(v_0+u_0)-36\sec\theta \tag{48}$$

$$B_y=\sqrt{3}[(10+8\sec^2\theta)(v_0-u_0)-12\,\mathrm{tg}\,\theta] \tag{49}$$

$$\beta_B=\mathrm{arctg}\,(B_y/B_x) \tag{50}$$

经过化简，最后得

$$Z_B=\frac{2}{\pi^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\sin^2\theta e^{6zg_1(\theta)}\left(\frac{1}{2z^2r_B}\right)^{1/2}\cos[6zg_2(\theta)-\frac{1}{2}\beta_B(\theta)] \tag{51}$$

这个定积分可用数值计算方法求值。计算表明，$z\geqslant 2$ 时，$Z_B\ll Z_A$。例如 $z=2$ 时，$Z_A=105.40218$；$Z_B=1.5198\times10^{-3}$，只影响第 6 位有效数字。z 愈大，Z_A 指数增加，而 Z_B 指数下降，所以对于 $z\geqslant 2$，完全可以忽略 Z_B 的贡献，于是得

$$Z=\int_{SU(3)}\mathrm{d}Ue^{zr_r(U+U^+)}$$

$$=\frac{2}{\pi^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\sin^2\varphi e^{2z^3(x_0+x_0^{-1/2}x_1^{3/2}\cos\varphi)}\left(\frac{1}{2z^3r_0}\right)^{1/2}\left[1-A_2\left(\frac{1}{2z^3r_0}\right)-A_4\left(\frac{1}{2z^3r_0}\right)^2\right]\quad(z\geqslant 2) \tag{52}$$

4 结论

在格点规范理论中碰到的单链 SU(3) 群积分(1)，在 $J=z1$ 情况下，可以比较方便地求出 Z 的值。当 $z\leqslant 2$ 时，可用(6)式求得，而在 $z\geqslant 2$ 时，可用(52)式求得，$z=2$ 时用(6)式与(52)式所得结果一致。我们用(52)式计算的结果如下：

z	Z	z	Z
2	105.4022	7	8.114013×10^{12}
3	8738.432	8	1.925150×10^{15}
4	1.135170×10^{6}	9	4.860933×10^{17}
5	1.894521×10^{8}	10	1.289219×10^{20}
6	3.709522×10^{10}	11	3.558192×10^{22}

以上计算单链 SU(3) 群积分的方法也可推广到计算格点规范理论中遇到的几种有关的 SU(3) 群积分，从而与 SU(3) 格点规范理论有关的单链积分，都可以用数值计算方法求值。

参考文献

〔1〕 Guo Shuohong, *Commun in Theor. Phys.* (Beijing), 5 (1985), 613

〔2〕 郭硕鸿等，中山大学学报（自然科学版），1984，4，48

〔3〕 Kogut J, *Rev. Mod. Phys.*, 55 (1983), 775

〔4〕 Creutz M, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, 1983

〔5〕 Creutz M, *Rev. Mod. Phys.*, 50 (1978), 561

〔6〕 Brower R et al., *Nucl. Phys.*, B 180 (1981), 221

〔7〕 Brower R et al., *Nucl. Phys.*, B 190 (1981), 699

〔8〕 Eriksson K et al., *J. Math. Phys.*, 22 (1981), 2276

〔9〕 Lang C et al., *Phys. Lett.*, 100B (1981), 29

Definite Integral Expression of the SU(3) One-link Integral

*Liu Jinming** *Gong Di*

Abstract

A definite integral expression of the SU(3) One-link partition function invariant group integral in the weak coupling regions of lattice gauge theories is obtained by the steepest descent method. The integral can be numerically evaluated easily. This method can be extended to some associated SU(3) group integral in the lattice gauge theories.

Keywords lattice gauge theory, SU(3) group, steepest descent method

* Department of Physics