

· 研究简报 ·

拟线性椭圆型方程广义解的最大值原理

梁 鏊 廷

(数学系)

摘 要

对形如(1)的拟线性椭圆型方程的广义解,证明成立解的最大值原理。

关键词 拟线性椭圆型方程、广义解和最大值原理

设 G 是 n 维欧氏空间 E^n 中的有界连通区域。 $p > 1$, $W_p^1(G)$ 和 $\overset{\circ}{W}_p^1(G)$ 是通常的 CoBoлев 空间。

在 G 考虑方程

$$\int_G \{\nabla v \cdot \vec{A}(x, u, \nabla u) + vB(x, u, \nabla u)\} dx = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_p^1(G) \quad (1)$$

假定 $\vec{A}(x, u, \xi)$ (n 维向量函数)和 $B(x, u, \xi)$ 在 $G \times E^1 \times E^n$ 上定义,当 x 固定时是 u, ξ 的连续函数,当 u, ξ 固定时是 x 的可测函数,满足下面的结构条件:

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \vec{A}(x, u, \nabla u) &\geq k_0 |\nabla u|^p \\ |\vec{A}(x, u, \nabla u)| &\leq k_1 |\nabla u|^{p-1} \\ |B(x, u, \nabla u)| &\leq b(x) |\nabla u|^{p-1} \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $k_1 \geq k_0 > 0$ 为常数, $b(x)$ 在 G 非负可测,并且 $b(x) \in L_r(G)$, $r = n$ 当 $1 < p < n$; $r > n$ 当 $p = n$; $r = p$ 当 $p > n$ 。

定理 设 $p > 1$, 设 $u \in W_p^1(G)$ 是方程(1)的下解,即满足

$$\int_G \{\nabla v \cdot \vec{A}(x, u, \nabla u) + vB(x, u, \nabla u)\} dx \leq 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_p^1(G), \quad v \geq 0 \quad (1')$$

其中的 \vec{A} 和 B 满足结构条件(2)。那么,除非 u 恒等于常数,否则

$$\forall \text{rai} \max_{G'} u(x) < \forall \text{rai} \max_G u \quad \forall G' \subset \subset G \quad (3)$$

简记 $B(\rho) = \{|x| < \rho\}$ 。

引理 设 $u \in W_p^1(B(\rho))$, $1 \leq p < n$, 设在 $B(\rho)$ 的某个正测度集 S 上, $u = 0$ 。设 $\eta(x)$ 是

本文1986年10月收到

$|x|$ 的取值在 $[0,1]$ 的非增连续函数,又设 $\eta(x)$ 在集合 S 上取值1,那么对任何可测子集 $e \subset E$,

$$\int_e |u(x)|\eta(x)dx \leq \frac{C(n)\rho^n}{\text{mes}S} \text{mes}^{\frac{1}{n}} e \int_{B(\rho)} |\nabla u|\eta(x)dx \quad (4)$$

$$\left(\int_{B(\rho)} (|u(x)|\eta(x))^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C(n,p, \frac{\rho^n}{\text{mes}S}) \left(\int_{B(\rho)} (|\nabla u|\eta(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0 \right)$$

(4)是文[1]的结论。(5)直接由周知的位势型积分定理给出,因为[1]在证明(4)的过程中,推导出

$$|u(x)|\eta(x) \leq \frac{C(n)\rho^n}{\text{mes}S} \int_{B(\rho)} \frac{|\nabla u(y)|\eta(y)}{|y-x|^{n-1}} dy \quad (6)$$

定理的证明 记 $M = \text{vrai max}_G u(x)$ 。 $M = +\infty$ 的情形,断言(3)是平凡的,因为 $u \in W'_p(G)$ 作为方程(1)的下解是局部有界的^[2,3]。故只需对 $M < +\infty$ 的情形作证明。用反证法:设 $\text{mes}\{x \in G, u(x) < M\} > 0$ 并且存在某个 $G' \subset \subset G$,使

$$\text{vrai max}_{G'} u(x) = M$$

那么我们可以找到一点,不妨设是坐标原点 $O \in G$ 和某个 $\rho > 0$,使 $B(2\rho) \subset G$ 并使

$$\text{vrai max}_{B(\rho)} u = M, \quad \text{mes}\{x \in B(\rho), u(x) < M\} > 0, \quad (7)$$

因为不然的话, u 在 G 只能恒等于常数。代换 $\bar{u} = M - u$,那么 \bar{u} 在 G 为非负,并且由于(7), $\text{mes}\{x \in B(\rho), \bar{u} > 0\} > 0$ 。更有进者,存在常数 $\gamma > 0, 0 < \theta < 1$,使(可用反证法证明)

$$\text{mes}\{B(\rho), \bar{u}(x) > \gamma\} \geq \theta \text{mes} B(\rho). \quad (8)$$

根据(1)', \bar{u} 满足

$$\int_G \{\nabla v \cdot \vec{A}(x, M - \bar{u}, -\nabla \bar{u}) + vB(x, M\bar{u} - \nabla \bar{u})\} dx \leq 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}'_p(G), \quad v \geq 0 \quad (9)$$

设 $\varepsilon > 0$,置

$$w = \ln \frac{\gamma}{\bar{u} + \varepsilon} \quad (\gamma \text{为(8)中出现的常数}) \quad (10)$$

要证 w 在 $B(\rho)$ 有和 ε 无关的上界 C ,那么根据(10),有

$$\text{vrai min}_{B(\rho)} \bar{u} + \varepsilon \geq \gamma e^{-C}$$

由于 \bar{u}, γ 和 C 和 ε 无关,命 $\varepsilon \rightarrow 0$ 上式继续保持,这和(7)的第一个式子矛盾。所以问题归结为证 w 在 $B(\rho)$ 有上界(和 ε 无关)。为此,置

$$(w - k)^+ = \max\{w(x) - k, 0\}, \quad k \geq 0,$$

$$v = \frac{\zeta^\lambda(x)(w-k)^+}{(\bar{u} + \varepsilon)^{p-1}}, \quad \lambda = \frac{p^2}{p-1}$$

其中 $\zeta(x)$ 是 $|x|$ 的逐段为线性的连续函数, 满足

$$\zeta(x) = 0 \quad \text{当 } |x| \leq \rho_1, \quad \zeta(x) = 1 \quad \text{当 } |x| \geq \rho_0$$

其中 $\rho \leq \rho_1 < \rho_0 \leq 2\rho$. 那么 $|\nabla \zeta| \leq (\rho_0 - \rho_1)^{-1}$ 并且 $v \in W_p'(G), v \geq 0$. 取 v 作试验函数代入(9), 利用结构条件(2)并经过常规的计算, 以及利用Young不等式, 可以得到

$$\begin{aligned} & \int_{G \cap \{w > k\}} \{ \zeta^\lambda |\nabla w|^p + (w-k)\zeta^\lambda |\nabla w|^p \} dx \\ & \leq c(n, p, K_0, K_1) \left\{ \int_{G \cap \{w > k\}} (w-k)\zeta^{\frac{\lambda}{p}} |\nabla \zeta|^p dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{G \cap \{w > k\}} (w-k)\zeta^\lambda b(x) |\nabla w|^{p-1} dx \right\} \end{aligned} \tag{11}$$

对任何 $k \geq 0$, 根据(8)和 w 的定义, 有

$$\text{mes}\{x \in B(\rho), w \leq k\} \geq \text{mes}\{x \in B(\rho), \bar{u} > \gamma\} \geq \theta \text{mes}B(\rho) \geq \frac{\theta}{2^n} \text{mes}B(\rho_0) \tag{12}$$

根据(12), 取 $S = \{x \in B(\rho), w \leq k\}, \eta = \zeta^{\frac{\lambda}{p}}$, 在 $B(\rho_0)$ 上对 $(w-k)^+$ 应用(4), 给出

$$\begin{aligned} & \int_{G \cap \{w > k\}} (w-k)\zeta^{\frac{\lambda}{p}} |\nabla \zeta|^p dx \leq \frac{1}{(\rho_0 - \rho_1)^p} \int_{B(\rho_0) \cap \{w > k\}} (w-k)\zeta^{\frac{\lambda}{p}} dx \\ & \leq \frac{c(n, \theta)\rho_0}{(\rho_0 - \rho_1)^p} \int_{B(\rho_0) \cap \{w > k\}} |\nabla w| \zeta^{\frac{\lambda}{p}} dx \\ & \leq \delta \int_{B(\rho_0) \cap \{w > k\}} \zeta^\lambda |\nabla w|^p dx + \frac{c(n, \theta, \delta)\rho_0^{\frac{p}{p-1}}}{(\rho_0 - \rho_1)^\lambda} A(k, \rho_0) \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $A(k, \rho_0) = \text{mes} B(\rho_0) \cap \{w > k\}$.

为了处理(11)式右端最后一项, 我们注意, 根据假定 $b(x) \in L_r(G)$, 因而

$$\int_{G \cap \{b(x) > N\}} |b(x)|^r dx = \varepsilon(N) \rightarrow 0 \quad \text{当 } N \rightarrow \infty \tag{14}$$

现在, 如果 $1 < p < n$, 在 $B(\rho_0)$ 上对 $(w-k)^+$ 应用引理1断言(5), 即得

$$\left(\int_{G \cap \{w > k\}} |(w-k)\zeta^{\frac{\lambda}{p}}|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_{B(\rho_0) \cap \{w > k\}} |\nabla w|^p \zeta^\lambda dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{15}_1$$

其中常数 $c = c(n, p, \theta)$ 。如果 $p = n$, 取 $p' < n$ 使 $\frac{1}{n} - \frac{1}{r} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{n} = \frac{1}{q'} > 0$, 代替(15), 有

$$\begin{aligned} \left(\int_{G_n \{w>k\}} |(w-k)\zeta^{\frac{\lambda}{p}}|^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} &\leq c \left(\int_{B(\rho_0) \cap \{w>k\}} |\nabla w| \zeta^{\frac{\lambda}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c(n, r, \theta) \text{mes}^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}} G \left(\int_{B(\rho_0) \cap \{w>k\}} |\nabla w|^p \zeta^\lambda dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{15}_2$$

如果 $p > n$, 在 $B(\rho_0)$ 对 $(w-k)^+$ 应用(6), 再由Hölder不等式给出

$$\begin{aligned} (w-k)^+ \zeta^{\frac{\lambda}{p}} &\leq c(n, \theta) \int_{B(\rho_0)} \frac{|\nabla(w-k)^+| \zeta^{\frac{\lambda}{p}}}{|y-x|^{n-1}} dy \\ &\leq c(n, p, \theta) \text{mes}^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} G \left(\int_{B(\rho_0) \cap \{w>k\}} |\nabla w|^p \zeta^\lambda dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{15}_3$$

联合(14)和(15)₁~(15)₃并利用Hölder不等式(注意 $\lambda = \frac{\lambda}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\lambda$), 即得

$$\begin{aligned} \int_{G_n \{w>k\} \cap \{b(x) > N\}} (w-k)\zeta^\lambda b(x) |\nabla w|^{p-1} dx \\ \leq \varepsilon(N) c \int_{B(\rho_0) \cap \{w>k\}} |\nabla w|^p \zeta^\lambda dx \end{aligned} \tag{16}$$

其中的 $c > 0$ 只依赖于 n, p, r, θ 和 $\text{mes}G$, 此外, 借助Hölder不等式和 Young 不等式, 给出

$$\begin{aligned} \int_{G_n \{w>k\} \cap \{b(x) \leq N\}} (w-k)\zeta^\lambda b(x) |\nabla w|^{p-1} dx \\ \leq N \left(\int_{G_n \{w>k\}} (w-k)\zeta^\lambda dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{G_n \{w>k\}} (w-k)\zeta^\lambda |\nabla w|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ \leq \delta \int_{G_n \{w>k\}} (w-k)\zeta^\lambda |\nabla w|^p dx + c(\delta, N) \int_{G_n \{w>k\}} (w-k)\zeta^\lambda dx \end{aligned} \tag{17}$$

再一次在 $B(\rho_0)$ 上对 $(w-k)^+$ 应用(4)(这一次取 $\eta = \zeta^\lambda$, 集合 S 仍同前), 即得

$$\begin{aligned} \int_{G_n \{w>k\}} (w-k)\zeta^\lambda dx &\leq c(n, \theta) A(k, \rho_0) \int_{B(\rho_0) \cap \{w>k\}} |\nabla w| \zeta^\lambda dx \\ &\leq c(n, \theta) A(k, \rho_0)^{\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(\rho_0) \cap \{w>k\}} |\nabla w|^p \zeta^\lambda \right)^{1/p} \end{aligned} \tag{18}$$

联合(11)、(13)、(16)~(18)并取 N 充分大, $\delta > 0$ 充分小, 即得

$$\int_{G \cap \{w > k\}} (\zeta \lambda |\nabla w|^p + (w-k)\zeta \lambda |\nabla w|^p) dx \leq \frac{c \rho_0^{\lambda/p}}{(\rho_0 - \rho_1)^\lambda} A(k, \rho_0) \quad (19)$$

其中的常数 $c > 0$ 只依赖于 $n, p, r, \theta, \kappa_0, \kappa_1, \|b\|_{L_r}(G)$ 和 $\text{mes}G$. 然后, 联合(18)、(19)即见对任何 $h > k \geq 0$, 成立

$$\begin{aligned} (h-k)A(h, \rho_1) &\leq \int_{B(\rho_1) \cap \{w > k\}} (w-k) dx \\ &\leq \int_{B(\rho_0) \cap \{w > k\}} (w-k) \zeta \lambda dx \leq \frac{c \rho_0^{\frac{1}{p-1}}}{(\rho_0 - \rho_1)^{\frac{p}{p-1}}} A(k, \rho_0)^{1 + \frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (20)$$

其中的常数 $c > 0$ 只依赖于 $n, p, r, \theta, \kappa_0, \kappa_1, \|b\|_{L_r}(G)$ 和 $\text{mes}G$.

对 $v = 0, 1, 2, \dots$ 置

$$k_v = H - \frac{H}{2^v}, \quad \rho_v = \rho + \frac{\rho}{2^v}$$

其中 $H > 0$ 足够大(依赖于 n, p 以及(20)右端的常数 c). 分别用 k_{v+1}, k_v 取代 h, k , 用 ρ_v, ρ_{v+1} 取代 ρ_0, ρ_1 , 由(20)给出

$$\frac{H}{2^{v+1}} A(k_{v+1}, \rho_{v+1}) \leq \frac{c(2\rho)^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\frac{\rho}{2^{v+1}}\right)^{\frac{p}{p-1}}} A(k_v, \rho_v)^{1 + \frac{1}{n}} \quad (21)$$

经过迭代, 由(21)即可证明

$$\lim_{v \rightarrow \infty} A(k_v, \rho_v) = 0$$

后者隐含了 $\forall \text{r} \max_{B(\rho)} w \leq H$. 这正是我们所要证明的. 证讫.

参 考 文 献

- [1] Ladyženskaja, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'ceva, N.N.: Linear and quasi-linear equations of parabolic type, Translations of Mathematical Monographs, (23)1968.
- [2] Лалыженская, О. А., Уралъева, Н.Н. (吉林大学数学系译): 《线性和拟线性椭圆型方程》, 科学出版社, 1987.
- [3] Serrin, J., Local behavior of solutions of quasilinear equations, Acta Math., 111, 1964, 247-302.

- [4] Moser, J., A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13, 1960, 457—468.

The Maximum Principle for Generalized Solutions of Quasi-linear Elliptic Equations

Liang Xiting

Abstract

An improved proof is given to the maximum principle for generalized solutions of one class of quasi-linear elliptic equations in divergence form.

Keywords Quasi-linear elliptic equations, generalized solutions and maximum principles

· 简讯 ·

电话线传输静态图象文字系统

无线电电子学系肖自美副教授等人研制的“电话线传输静态图象文字系统”已成功。

该系统采用帧间帧内自适应方块编码相结合的高效压缩编码技术，以微机为主体，以软硬件相结合的方式构成，图象文字传输的各种状态和全部工作过程均由微机管理和控制。它既可与计算机数据通讯网相联结，也可与普通电话网相联结进行远程传输，利用普通电话线（包括通过电话交换总机）即可进行静态图象文字双向传送，并可将图象文字打印或存贮。利用本系统传输图象文字，保密性与抗干扰能力强，速度快，清晰度高（水平400TV线，垂直450TV线）。

该系统具有八十年代先进水平，并有广泛的应用前景。它可应用于机关进行文件图表的即时传真；可用于指纹查校，海关监察或交通管理；工业上可对不同生产现场进行集中管理、监视、调度等等。