

# 可分解空间注记\*

林金楨  
(数学系)

## 摘要

本文给出半序拓扑线性空间一类对偶定理的一般形式,同时利用Mackey邻域的一个特征,讨论了强拓扑的可分解性与 $o$ -凸性并获得相应的结果.

**关键词** 局部可分解空间,局部序凸空间

几个定义<sup>(1)</sup>:

设 $(E, E_+, \mathcal{S})$ 是半序局部凸拓扑线性空间,圆、凸集 $V \subset E, V$ 的可分解核 $D(V)$

$$D(V) = \text{Co}[-(V \cap E_+) \cup (V \cap E_+)]$$

$V$ 的序凸包 $F(V)$

$$F(V) = (V + E_+) \cap (V - E_+)$$

称 $(E, E_+, \mathcal{S})$ 是局部可分解空间,若 $\mathcal{S}$ 存在一个由可分解邻域组成的局部基 $\{D(V) | V \in \mathcal{Z}_E\}$ ;称 $(E, E_+, \mathcal{S})$ 为局部 $o$ -凸空间,若 $\mathcal{S}$ 存在一个由序凸邻域组成的局部基 $\{F(V) | V \in \mathcal{Z}_E\}$ .

文献[1], [2], [3]等给出的对偶定理都是描写一个开的 $\tau(E, E')$ 邻域或一个 $\tau(F, E')$ 邻域的对偶关系,下面给出关于两个不同的 $\tau(E, E')$ 邻域的对偶关系.

**定理1** 设 $(E, E_+, \mathcal{S})$ 是一个半序局部凸拓扑线性空间,  $U, V$ 是绝对凸零点的 $\tau(E, E')$ 邻域.若 $D(\text{int}V)$ 是零点 $\tau(E, E')$ 邻域,那么

$$F(V^0) \subset U^0 \iff D(\text{int}V) \supset \text{int}U$$

**证明** 设 $D(\text{int}V) \supset \text{int}U$ .由于 $\text{int}V$ 及 $\text{int}U$ 也是绝对凸零点的 $\mathcal{S}$ 邻域且

$$\overline{\text{int}V} = V, \quad \overline{\text{int}U} = U$$

因此  $D(\text{int}V) \supset \text{int}U \implies (D(\text{int}V))^0 \subset (\text{int}U)^0 \implies F((\text{int}V)^0) \subset (\text{int}U)^0$

$$\implies F(\overline{(\text{int}V)^0}) \subset \overline{(\text{int}U)^0} \implies F(V^0) \subset U^0$$

本文1987年11月30日收到

\*中山大学高等学术研究中心资助课题

反之, 设  $F(V^0) \subset U^0$ . 如果  $x \in \text{int}U$ , 则存在  $\delta > 1$ , 使  $\delta x \in \text{int}U$ , 此时也必有  $\delta x \in \overline{D(\text{int}V)}$ , 因若不然, 由分离定理存在  $f \in E'$

$$f(\overline{D(\text{int}V)}) \leq 1 < f(\delta x)$$

也就是说, 存在  $f \in ((\overline{D(\text{int}V)})^0 = F((\text{int}V)^0) = F(V^0)$ , 但  $f \in (\text{int}U)^0 = U^0$ , 相抵. 又依题设  $D(\text{int}V)$  是零点的  $\tau(E, E')$  邻域且显然还是凸的, 因此由  $\delta x \in \overline{D(\text{int}V)}$  便得

$$(1/\delta)(\delta x) = x \in D(\text{int}V)$$

下列定理 1 的推论是半序空间中几个常用的定理<sup>[1]</sup>.

**推论 1** 设  $(E, E', \mathcal{S})$  是半序局部凸拓扑线性空间,  $U, V$  是零点的绝对凸  $\tau(E, E')$  邻域, 如果  $D(\text{int}V)$  是零点的  $\tau(E, E')$  邻域, 那么

$$(i) \quad F(V^0) \subset U^0 \iff \overline{D(V)} \supset \overline{U} \iff D(\text{int}V) \supset \text{int}U$$

(ii) 特别, 若  $U = V$  为开邻域, 则有

$$F(V^0) = V^0 \iff \overline{D(V)} = \overline{V} \iff D(V) = V$$

**推论 2** 设  $(E, E', \mathcal{S})$  是半序局部凸拓扑线性空间,  $V$  为零点的绝对凸  $\tau(E, E')$  邻域. 若  $D(V)$  是零点的  $\tau(E, E')$  邻域, 则  $D(V)$  为零点的  $\mathcal{S}$  邻域的充要条件是  $\overline{D(V)}$  是零点的  $\mathcal{S}$  邻域.

推论 2 的论证是容易的. 事实上, 由于  $V$  是绝对凸零点邻域, 便有

$$D(\text{int}V) \supset D\left(\frac{1}{2}V\right) = \frac{1}{2}D(V)$$

知  $D(\text{int}V)$  也是零点  $\tau(E, E')$  邻域. 现若  $\overline{D(V)}$  是零点  $\mathcal{S}$  邻域, 则存在零点的绝对凸邻域  $U$ , 使  $\overline{D(V)} \supset U$ , 由推论 1 便知  $D(V)$  为  $\mathcal{S}$  邻域.

我们知道, 拓扑线性空间  $(E, \mathcal{S})$  中吸收、闭、圆、凸集(桶)族形成了强拓扑;  $(E, \mathcal{S})$  中吸收所有有界集的圆、凸、吸收集族构成了 Bornological 拓扑等等. 一个联想到的问题是: 怎样一族圆、凸吸收集形成 Mackey 拓扑呢? 引理将给出一个  $\tau(E, E')$  邻域的新特征<sup>[4]</sup>.

**引理** 设  $(E, \mathcal{S})$  是局部凸拓扑线性空间,  $V$  是  $E$  中的圆、凸吸收集, 那么  $V$  为  $\tau(E, E')$  邻域的充要条件是  $f \in V^\pi$  时,  $f$  为  $\mathcal{S}$  连续.

**证明** 只要证充分性. 记

$$\mathcal{A}_E = \left\{ \bigcap_{i=1}^K U_i \mid U_i \subset E, U_i \text{ 绝对凸吸收集}, U_i^\pi = U_i^0, K = 1, 2, \dots \right\}$$

那么不难知  $E$  上可确定唯一局部凸线性拓扑  $(E, \tau')$ ,  $\mathcal{A}_E$  是它的零点局部基. 以下来证  $\tau' = \tau(E, E')$ . 记

$$A^{\tau'} = \left\{ f \in (E, \tau')' \mid f(A) \leq 1, A \subset E \right\}$$

设  $f \in (E, \tau')'$ , 则存在  $V \in \mathcal{A}_E$ , 使

$$f \in V^{\tau'} = \left( \bigcap_{i=1}^k U_i \right)^{\tau'}$$

由于有限个的紧凸集之并的凸包仍为紧集，故

$$\left(\bigcap_{i=1}^k U_i\right)^{\tau'} = \overline{\text{Co}} \bigcup_{i=1}^k U_i^{\tau'} \subset \text{Co} \bigcup_{i=1}^k U_i^{\pi} = \text{Co} \bigcup_{i=1}^k U_i^0$$

由此便知  $f \in (E, \mathcal{P})'$ ，又显然， $\tau' \supset \tau(E, E')$ 。证毕。

关于  $(E, E_+, \mathcal{P})$  的 Mackey 拓扑和弱拓扑的可分解与序凸的对偶特征，已有明确的结论<sup>[1]</sup>。以下给出关于强拓扑可分解的对偶特征的一些结果<sup>[6]</sup>。

**定理 2** 设  $(E, E_+, \mathcal{P})$  是半序局部凸拓扑线性空间， $E_+$  闭且生成。若  $E'_+$  是  $\sigma(E', E)$  完备，则  $(E, E_+, \beta(E, E'))$  是局部可分解空间。

**证明** 设  $V$  是零点圆、凸  $\beta(E, E')$  邻域，由  $E_+$  生成知  $D(V)$  是圆、凸吸收集，从而  $\overline{D(V)}$  是零点的  $\beta(E, E')$  邻域。下面进一步证明  $D(V)$  是  $\beta(E, E')$  邻域。

设  $f \in D(V)^\pi$ ，则对任意  $u \in V \cap E_+$ ，有  $f(u) \leq 1$ ，由于  $V$  是圆、凸  $\beta(E, E')$  邻域，它的度规  $p_v(x)$  为  $\beta(E, E')$  连续，并且  $E_+$  上的超线性泛函  $f$  满足

$$f(u) \leq p_v(u), \quad \forall u \in E_+$$

由 Bonsull 定理，存在  $g \in E'_\beta = (E, \beta(E, E'))'$  使

$$\begin{aligned} f(u) &\leq g(u), & \forall u \in E_+ \\ f(x) &\leq p_v(x), & \forall x \in E \end{aligned}$$

也即存在  $g \in E'_\beta$ ， $g \geq f$ 。记  $f = g - (g - f) \triangleq g - f_+$ ， $f_+ \in E_+^*$ ，现证  $f_+ \in E'_\beta$ 。因  $\theta \in E'_+$ ，

$E'_+$  为  $\sigma(E, E')$  完备的充分且必要条件是  $(E'_+)^{\circ\pi} = E'_+$ ，同时依题设  $E_+$  闭，于是有

$$E'_+ = (E'_+)^{\circ\pi} = (-E_+)^{\pi} = -E_+^{\pi}$$

即  $E_+^* = E'_+$

这样便证得：若  $f \in D(V)^\pi$ ，则  $f \in E'_\beta$ 。于是由引理知  $D(V)$  为零点的  $\tau(E, E'_\beta)$  邻域。又已得知  $\overline{D(V)}$  为  $\beta(E, E')$  邻域，因此由推论 2 便推出  $D(V)$  是  $\beta(E, E')$  邻域。 $(E, E_+, \beta(E, E_+))$  为局部可分解空间。

**系** 设  $(E, E_+, \mathcal{P})$  是半序局部凸拓扑线性空间，如果  $\text{int} E_+ \neq \emptyset$ ，则

- (i)  $(E, \beta(E, E'))$  局部可分解；
- (ii)  $(E', \beta(E', E))$  局部  $o$ -凸。

**证明**  $\text{int} E_+ \neq \emptyset$ ，那么每一正线性泛函连续，由定理 2 的证明即知结论 (i) 正确。

现证 (ii)。设  $e \in \text{int} E_+$ ，则存在零点圆、凸邻域  $V$  使

$$e + V \subset E_+$$

对  $(E, \mathcal{P})$  的任一个圆、凸有界集  $B$ ，存在  $\lambda > 0$ ，使  $\lambda B \subset V$ ，也就有

$$e + \lambda B \subset E_+$$

$$\text{令 } A = \frac{1}{\lambda} \text{Co}[-(e + \lambda B) \cup (e + \lambda B)]$$

则  $A$  是圆、凸有界集。

设  $x \in B$ , 有关系式

$$e + \lambda x = x_+, \quad x_+ \in E_+, \quad \text{或} \quad x = \frac{x_+}{\lambda} - \frac{e}{\lambda}$$

由于  $B$  为均衡集,  $e \in (e + \lambda B)$ , 于是  $\frac{e}{\lambda} \in A$ , 又显然

$$\frac{x_+}{\lambda} = \frac{e + \lambda x}{\lambda} \in A$$

因此有  $B \subset A \cap E_+ - A \cap E_+$ ,  $E_+$  是严格  $\beta$ -锥, 由 Sckaefer 定理知  $(E, E_+, \beta(E, E'))$  为局部  $o$ -凸空间。

### 参 考 文 献

- [1] Wong Yruchuen, *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag Berlin*, 1976, 531, 9-20, 28-39
- [2] Wong Yauchuen & Ng Kungfu, *Oxford Math. Monographs, Clarendon press*, 1973, 1-29
- [3] 林金桢, 科学通报, 28(1983), 22, 1345-1347
- [4] 鲁世杰, 南京大学学报, 22(1986), 1, 4-8
- [5] 韩景奎, 中山大学学报(自然科学版), 1984, 3, 99-101
- [6] Ng Kungfu and Duhoux, *M.J.London Math. soc. (2)*, 8(1974), 201-208

## A Note of Decomposable Space

Lin Jinzhen\*

### Abstract

The general form of the theorem of duality with respect to decomposability and order convexity is given on a partially ordered locally convex space. The decomposable property in strong topology is discussed and some related results are obtained.

**Keywords** locally decomposable space, locally order convex space

\* Department of Mathematics